2023 届高三摸底测试卷
理科数学

本试卷共4页，23小题，满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案．

3．非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案．不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4．考生必须保证答题卡整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一．选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2+x-2<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{-2,-1,1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．复数 $\dfrac{1}{1+2i}$ 的虚部是

A．$-\dfrac{2}{5}$　　B．$-\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

3．若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 2 \\ y-x\le 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

4．"$ab>0$"是"$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

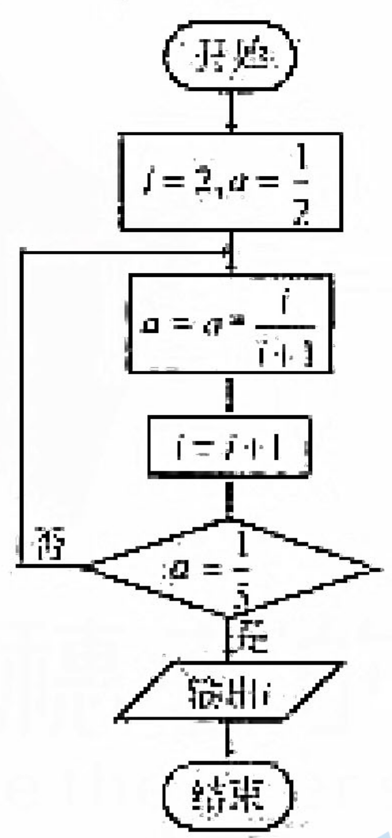
5．执行如图所示的程序框图，则输出 i 的值为

A．3

B．4

C．5

D．6



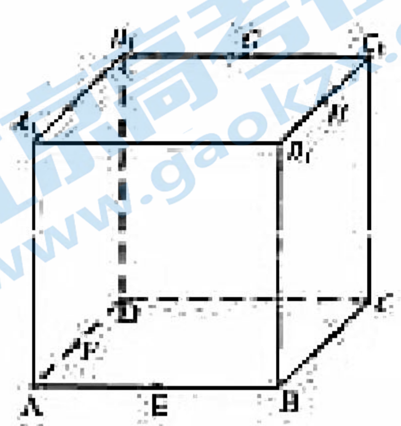
6．若直线 $x=2\sqrt{2}y-3\sqrt{2}$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．$-2\sqrt{2}$　　D．-4

7．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB,AD,D_1C_1,C_1B_1 的中点分别为 E,F,G,H，则下列直线中，与两平面 ACD_1，BDC_1 交线平行的一条直线是

A．EH　　B．HG

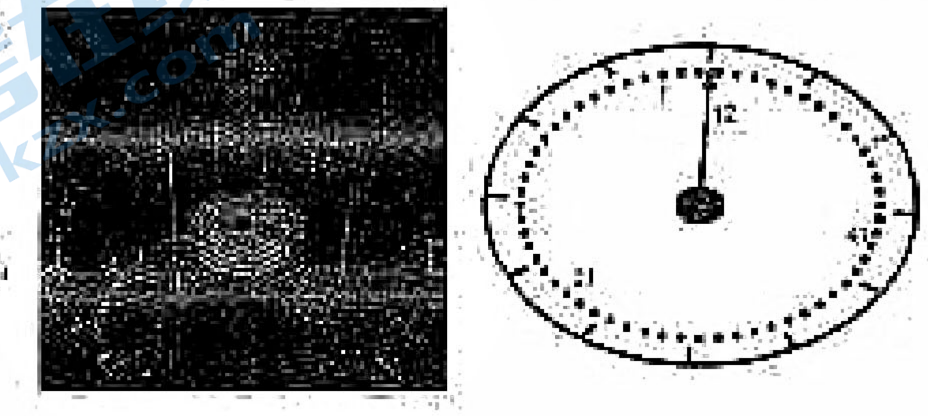
C．EG　　D．FH



8．冬残奥会闭幕式上，中国式浪漫再现，天干地支时辰钟表盘再现，由定音鼓构成的"表盘"形象上，60名残健共融表演者用行为模拟"指针"每隔60个时间刻度的行进轨迹．若以图中12点与圆心连线为始边，某时刻指向第1,21,41名残健共融表演者的"指针"为终边的角分别记为 α,β,γ，则 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ 的值为

A．-1　　B．0

C．1　　D．$\cos\alpha$



现场图　　示意图

9．设函数 $f(x)$ 的定义域为R，且 $f(x+2)$ 是奇函数，$f(2x+1)$ 是偶函数，则一定有

A．$f(4)=0$　　B．$f(-1)=0$　　C．$f(3)=0$　　D．$f(5)=0$

10．若 $2x-1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，则 x^2+y^2 的最小值为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

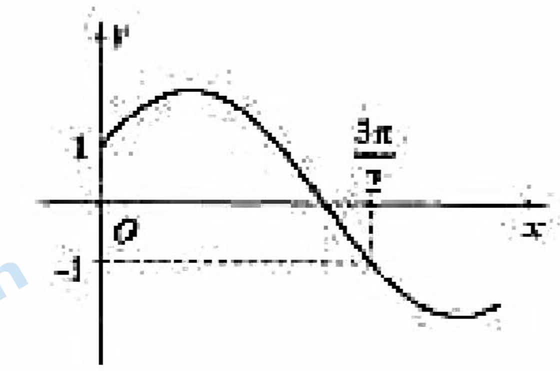
11．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则下列判断正确的是

A．函数 $f(x)$ 的周期为 4π

B．对任意的 $x\in\mathbb{R}$，都有 $f(x)\le f(\frac{2\pi}{3})$

C．函数 $f(x)$ 在区间 $[0,5\pi]$ 上恰好有三个零点

D．函数 $f(x-\frac{\pi}{4})$ 是偶函数



12．若体积为8的四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点都在表面积为 20π 的球面上，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，则棱 PA 的长为

A．$3\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{10}$ 或 $3\sqrt{2}$

二．填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知 $\vec{a}=(1,-3)$，$\vec{b}=(-2,1)$，则 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$______．

14．若函数 $f(x)=(x+a)\sin x$ 在 $x=\pi$ 时取得极值，则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的最小值为______．

15．某工厂10名工人某天生产同一类型零件，生产的件数分别是7,8,9,10,11,12,12,12,13,14，则这组数据的方差为______．（参考数据：这组数据的平方和为1212）

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17－21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）已知公差大于 0 的等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且a_1,a_2,a_4成等比数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和．

18．（12 分）如图是飞行棋部分棋盘图示，飞机的初始位置为 0 号格，抛掷一个质地均匀的骰子．若抛出的点数为 1,2，飞机在原地不动；若抛出的点数为 3,4，飞机向前移一格；若抛出的点数为 5,6，飞机向前移两格．记抛掷一次骰子后，飞机到达 1 号格为事件A，记抛两次骰子后，飞机到达 2 号格为事件B．

（1）求$P(A)$；

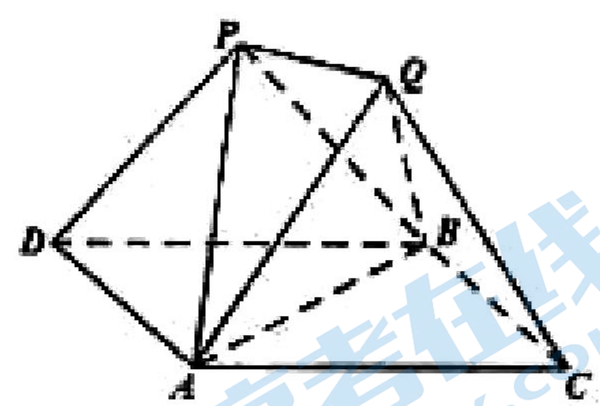
（2）求$P(B)$．

0	1	2	3	4	5	……

19．（12 分）如图，桌面上摆放了两个相同的正四面体$PABD$和$QABC$．

（1）求证：$PQ\perp AB$；

（2）若$AB=2$，求四面体$APQB$的体积．



20．（12 分）已知函数$f(x)=e^x+(1-a)x-\ln a\cdot\ln x$（$a>0$）

（1）若$a=e$，求函数$f(x)$的极值；

（2）讨论函数$f(x)$的单调性．

21．（12 分）已知$A(2,0)$，$B(0,1)$是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个顶点．

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）过点$P(2,1)$的直线l与椭圆E交于C,D，与直线AB交于点M，求$\dfrac{|PM|}{|PC|}+\dfrac{|PM|}{|PD|}$的值．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．（10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=t\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$为参数），以$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$．

（1）求曲线C_1的普通方程，曲线C_2的直角坐标方程；

（2）设曲线C_1,C_2的交点为A,B，求$|AB|$的值．

23．（10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|2x-6|-|3x-6|$．

（1）求不等式$f(x)>1$的解集；

（2）若不等式$f(x)\le k|x|$恒成立，求实数k的取值范围．

2023 届高三摸底测试卷
理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	C	C	D	C	B	A	A	C	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13．5　　14．$-\dfrac{\pi}{2}$　　15．4.56　　16．$20-10\sqrt{3}$

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答.

17.【解析】(1) 设公差为 d，因为 a_1,a_2,a_4 成等比数列，则 $a_2^{\ 2}=a_1a_4$，…………2 分

即 $(1+d)^2=1\times(1+3d)$，$d^2-d=0$，解得 $d=1$，$d=0$（舍），…………4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+n-1=n$；…………6 分

(2) $b_n=2^{a_{2n-1}}=2^{2n-1}$，$b_1=2$，$\{b_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，……9 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{2\times(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$. …………12 分

18.【解析】(1) $P(AB)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$；…………4 分

(2) $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，…………6 分

因此 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件 A,B 相互独立. …………8 分

(3) 随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3，4，

$P(X=0)=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$，$P(X=1)=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$，

$P(X=2)=(\dfrac{1}{3})^2+2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$，$P(X=3)=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$，

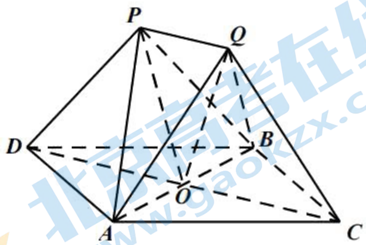
$P(X=4)=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$，…………10 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

所以 $EX=0\times\dfrac{1}{9}+1\times\dfrac{2}{9}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{1}{9}=2$. …………12 分

19.【解析】（1）方法一：因为ΔABD与ΔABC共面，



所以连接CD与AB相交于点O，

因为$PABD$和$QABC$是相同的正四面体，

所以四边形$ACBD$为菱形，则O为AB的中点，　………2 分

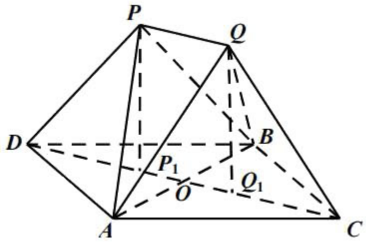
连接PO,QO，因为$PA=PB$，$QA=QB$，

所以$PO\perp AB$，$QO\perp AB$，　………………………………4 分

又因为$PO\cap QO=O$，所以$AB\perp$平面POQ，

所以$PQ\perp AB$；　……………………………………………………6 分

方法二：因为ΔABD与ΔABC共面，所以连接CD与AB相交于点O，



因为$PABD$和$QABC$是相同的正四面体，

所以四边形$ACBD$为菱形，则O为AB的中点，　………2 分

过顶点P,Q分别作底面的垂线，垂足分别为P_1,Q_1，

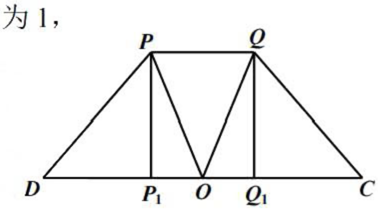
根据正四面体的性质，

所以P_1,Q_1分别为ΔABD和ΔABC的重心，　……………4 分

则P_1,Q_1在DC上，且$P_1Q_1 /\!/ PQ$，因为$AB\perp CD$，

所以$PQ\perp AB$；　……………………………………………………6 分

（2）如图，在四边形$DPQC$中，设正四面体$PABD$的边长为 1，



由（1）知，$OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$DP_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$OP_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以$PP_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$PQ=P_1Q_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

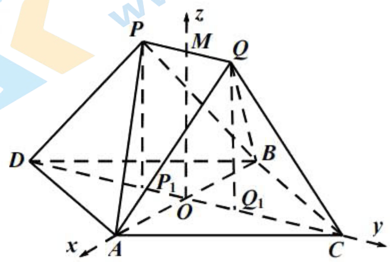
取PQ的中点为M，如图，以OA为x轴，OC为y轴，OM为z轴，建立空间直角坐标系，

则$A(\frac{1}{2},0,0),B(-\frac{1}{2},0,0),P(0,-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}),Q(0,\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})$，　…………………………8 分

则$\overrightarrow{AP}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}),\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}),\overrightarrow{AB}=(-1,0,0)$，

设平面APQ的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{6}y_1+\frac{\sqrt{6}}{3}z_1=0\\ -\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{6}y_1+\frac{\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}$，令$z_1=\sqrt{3}$，



所以$\overrightarrow{n_1}=(2\sqrt{2},0,\sqrt{3})$，

设平面APB的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}-x_2=0\\ -\frac{1}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{6}y_2+\frac{\sqrt{6}}{3}z_2=0\end{cases}$，令$z_2=1$，

所以$\overrightarrow{n_2}=(0,2\sqrt{2},1)$，　……………………………………………………10 分

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{11}}=\dfrac{\sqrt{33}}{33}$，

所以二面角$Q-AP-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{33}}{33}$. ……………………………………12 分

20.【解析】(1) $a=2,b=1$, ……………………………………2 分

故椭圆E的标准方程为: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

(2) 设$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),M(x_3,y_3)$，直线$l$的斜率为$k$，

则$|PC|=|x_P-x_1|\sqrt{1+k^2}=(2-x_1)\sqrt{1+k^2}$，

同理$|PD|=(2-x_2)\sqrt{1+k^2}$，$|PM|=(2-x_3)\sqrt{1+k^2}$，

则$\dfrac{|PM|}{|PC|}+\dfrac{|PM|}{|PD|}=\dfrac{2-x_3}{2-x_1}+\dfrac{2-x_3}{2-x_2}$. ……………………………………6 分

设$l: y-1=k(x-2)$，而$AB: \dfrac{x}{2}+y=1$，联立解得$x_3=\dfrac{4k}{2k+1}$， ……………………8 分

所以$2-x_3=2-\dfrac{4k}{2k+1}=\dfrac{2}{2k+1}$；

联立直线l与椭圆E方程，消去y得：$(4k^2+1)x^2-8k(2k-1)x+16k^2-16k=0$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{8k(2k-1)}{4k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{16k^2-16k}{4k^2+1}$， ……………………………………10 分

所以$\dfrac{1}{2-x_1}+\dfrac{1}{2-x_2}=-\dfrac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)}=-\dfrac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$$=-\frac{\dfrac{8k(2k-1)}{4k^2+1}-4}{\dfrac{16k^2-16k}{4k^2+1}-2\times\dfrac{8k(2k-1)}{4k^2+1}+4}=2k+1$$

所以$\dfrac{2-x_3}{2-x_1}+\dfrac{2-x_3}{2-x_2}=\dfrac{2}{2k+1}\times(2k+1)=2$，即$\dfrac{|PM|}{|PC|}+\dfrac{|PM|}{|PD|}=2$. ……………12 分

21.【解析】(1) $a=\mathrm{e}$时，$f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-\ln x$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})-\dfrac{1}{x}=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})+(1-\dfrac{1}{x})$， ……………………………………2 分

当$x>1$时，$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}>0$，$1-\dfrac{1}{x}>0$，所以$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

当$0<x<1$时，$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}<0$，$1-\dfrac{1}{x}<0$，所以$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，

则$f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(0,1)$； …………………… 5 分

(2) $f'(x)=\mathrm{e}^x+(1-a)-\dfrac{\ln a}{x}=(\mathrm{e}^x-a)+\dfrac{x-\ln a}{x}$ ($x>0$)，

(i) $\ln a\le 1$即$0<a\le \mathrm{e}$时，因为$x>1$，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}\ge a, x>1\ge \ln a$，所以$f'(x)>0$，因此函数$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)>f(1)=\mathrm{e}+1-a\ge \mathrm{e}+1-\mathrm{e}=1$，

不等式$f(x)<1$在区间$(1,+\infty)$上无解. …………………………… 9 分

(ii) $\ln a>1$即$a>\mathrm{e}$时，$1<x<\ln a$时，$\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^{\ln a}=a, x<\ln a$，因此$f'(x)<0$，所以函

数 $f(x)$ 在区间 $(1,\ln a)$ 上单调递减，$f(x)<f(1)=e+1-a<e+1-e=1$，不等式 $f(x)<1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有解.

综上，实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$. ………………………………… 12 分

22.【解析】（1）因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数)，

所以曲线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y=0$， ………………………………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2=4y+4$； ………………………………… 5 分

（2）因为曲线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y=0$，所以曲线 C_1 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

令 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\rho_A=\dfrac{2}{1-\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$， ………………………………… 8 分

令 $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$，则 $\rho_B=\dfrac{2}{1-\sin\dfrac{4\pi}{3}}=\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$， ………………………………… 9 分

所以 $|AB|=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}=16$. ………………………………… 10 分

23.【解析】$f(x)=|2x-6|-|3x-6|=\begin{cases} x, x<2 \\ -5x+12, 2\le x\le 3 \\ -x, x>3 \end{cases}$， ………………2 分

（1）当 $x<2$ 时，$x>1$，即 $1<x<2$，

当 $2\le x\le 3$ 时，$-5x+12>1$，解得 $x<\dfrac{11}{5}$，即 $2\le x<\dfrac{11}{5}$，

当 $x>3$ 时，$-x>1$，解得 $x<-1$，此时无解，

综上：不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $(1,\dfrac{11}{5})$； ………………………………5 分

（2）法一：$x=0$ 时上述不等式显然成立，

当 $x\ne 0$ 时，上述不等式可化为 $k\ge\dfrac{f(x)}{|x|}=\dfrac{|2x-6|-|3x-6|}{|x|}=|2-\dfrac{6}{x}|-|3-\dfrac{6}{x}|$ …8 分

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}=|2-\dfrac{6}{x}|-|3-\dfrac{6}{x}|\le|2-\dfrac{6}{x}-3+\dfrac{6}{x}|=1$， ………………………9 分

所以 $k\ge 1$，即实数 k 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ………………………10 分

法二：作 $f(x)=|2x-6|-|3x-6|$ 的图象，

令 $g(x)=k|x|$，显然若 $k\le 0$，

当 $0<x<2$ 时，$g(x)<0<f(x)$，不合题意； ………………………………8 分

当 $k>0$ 时，由图象可知 $k\ge 1$，

综上：实数 k 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ………………………………10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〝精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜
北京高考资讯