

数 学

命题人 中山市中山纪念中学 李健、周胜 审题人 黄华

本试卷共 22 题，满分 150 分，考试用时 120 分钟

注意事项：

1、答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等信息填涂在答题卡的指定位置。

2、回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将解答过程写在答题卡上。写在本试卷上无效。

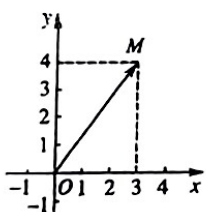
3、考试结束后，只需将答题卡上交。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

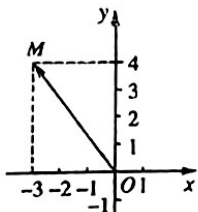
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 2 > 0\}$ ， $B = \{x | y = \ln(2-x)\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -2 < x < 1\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | x < 2\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

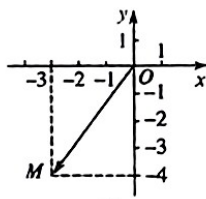
2. 在复平面上，复数 $z = 3 - 4i$ 的共轭复数 \bar{z} 对应的向量 \overrightarrow{OM} 是



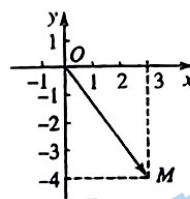
A



B



C



D

3. 已知双曲线 C 的两条渐近线互相垂直，则 C 的离心率等于

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{2}$ D. 2

4. 某种包装的大米质量 ξ (单位: kg) 服从正态分布 $\xi \sim N(10, \sigma^2)$ ，根据检测结果可知

$P(9.98 \leq \xi \leq 10.02) = 0.98$ ，某公司购买该种包装的大米 1000 袋，则大米质量 10.02kg

以上的袋数大约是

- A. 5 B. 10 C. 20 D. 40

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0， $a_1 = 1$ 且 a_2, a_4, a_8 成等比数列，其前 n 项和为

S_n ，则

- A. $a_{2023} = 4045$ B. $\frac{a_4}{a_3} < \frac{a_5}{a_4}$ C. $\frac{a_1 + a_{19}}{a_4 + a_6} = 2$ D. $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{2}$

6. 在数字通信中, 信号是由数字 0 和 1 组成. 由于随机因素的干扰, 发送的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0. 已知发信号 0 时, 接收为 0 和 1 的概率分别为 0.9 和 0.1; 发送信号 1 时, 接收为 1 和 0 的概率分别为 0.95 和 0.05, 若发送信号 0 和 1 是等可能的, 则接受信号为 1 的概率为 ()

- A. 0.475 B. 0.525 C. 0.425 D. 0.575

7. 已知奇函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数, 若 $a = -f\left(\log_2 \frac{1}{5}\right)$, $b = f(\log_2 4.1)$, $c = f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为

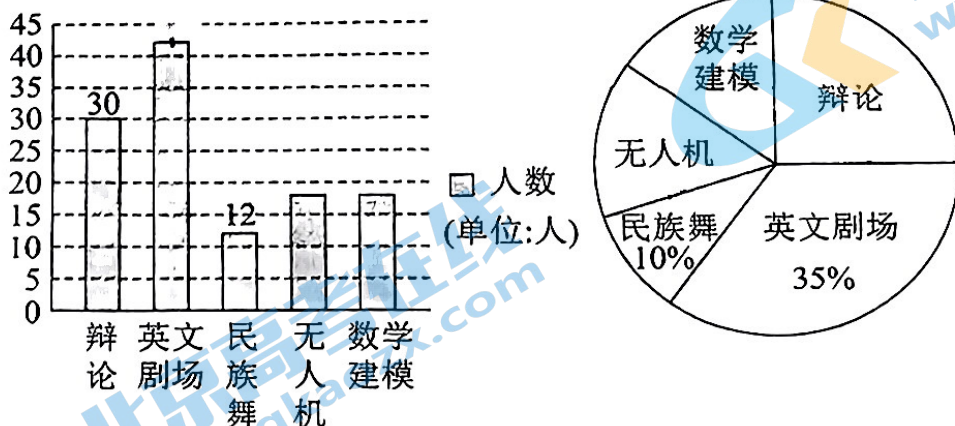
- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $c < a < b$

8. 已知函数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$, 若过点 $P(1, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则 t 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{30})$ B. $(0, \frac{1}{29})$ C. $(0, \frac{1}{28})$ D. $(0, \frac{1}{27})$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某学校组建了辩论、英文剧场、民族舞、无人机和数学建模五个社团, 高一学生全员参加, 且每位学生只能参加一个社团. 学校根据学生参加情况绘制如下统计图, 已知无人机社团和数学建模社团的人数相等. 下列说法正确的是



- A. 高一年级学生人数为 120 人
B. 无人机社团的学生人数为 17 人

C. 若按比例分层抽样从各社团选派 20 人, 则无人机社团选派人数为 3 人

D. 若甲、乙、丙三人报名参加社团, 则共有 60 种不同的报名方法

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, 则下列判断正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$ 上单调递增

D. 当 $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f(x) \in (-1, 1)$

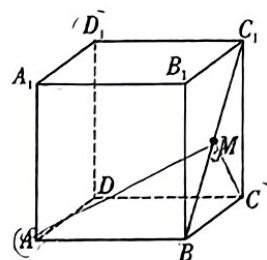
11. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 若点 M 在线段 BC_1 上运动, 则下列结论正确的是

A. 直线 A_1M 可能与平面 ACD_1 相交

B. 三棱锥 $A - MCD$ 与三棱锥 $D_1 - MCD$ 的体积之和为 $\frac{4}{3}$

C. $\triangle AMC$ 的周长的最小值为 $8 + 4\sqrt{2}$

D. 当点 M 是 BC_1 的中点时, CM 与平面 AD_1C_1 所成角最大



12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = (x - 2)e^x$, 则下列结论正确的是

A. $f(x) > 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

C. $f(x)$ 有且只有两个零点

D. $\forall x_1, x_2 \in [1, 2], |f(x_1) - f(x_2)| \leq e$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 幸福指数是衡量人们对自身生存和发展状况的感受和体验, 即人们的幸福感的一种指数. 某机构从某社区随机调查了 12 人, 得到他们的幸福指数 (满分: 10 分) 分别是 7.6, 8.5, 7.8, 9.2, 8.1, 9, 7.9, 9.5, 8.3, 8.8, 6.9, 9.4, 则这组数据的下四分位数 (也称第一四分位数) 是_____.

14. 已知 $(\frac{1}{x} - 2x^2)^n$ 的展开式中, 仅有第 4 项的二项式系数最大, 则展开式中第 5 项是_____.

15. 设函数 $y = f''(x)$ 是 $y = f'(x)$ 的导函数. 某同学经过探究发现, 任意一个三次函数

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 的图像都有对称中心 $(x_0, f(x_0))$, 其中 x_0 满足 $f''(x_0) = 0$. 已

知三次函数 $f(x) = x^3 + 2x - 1$, 若 $x_1 + x_2 = 0$, 则 $f(x_1) + f(x_2) =$ _____.

16. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”. 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆, 这个圆被称为该椭圆

的蒙日圆. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 则 C 的蒙日圆 O 的方程为 _____; 在圆

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 (r > 0)$ 上总存在点 P , 使得过点 P 能作椭圆 C 的两条相互垂直的切线, 则 r 的取值范围是 _____. (第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n+1)a_n = n^2 - 8n + k$, 数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 公比为 3 的等比数列.

(1) 求 a_n 和 b_n ;

(2) 令 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的最大项.

18. (本小题 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, D 为 AB 中点, $CD = \sqrt{7}$.

(1) 若 $BC = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

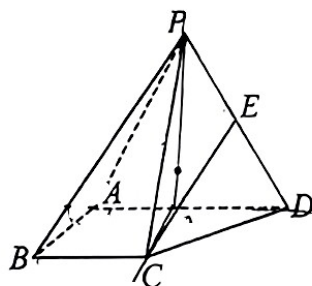
(2) 若 $\angle BAC = 2\angle ACD$, 求 AC 的长.

19. (本小题 12 分).

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $\triangle PAD$ 是正三角形, 且与底面 $ABCD$ 垂直, $BC \parallel$ 平面 PAD , $BC = \frac{1}{2}AD = 1$, E 是棱 PD 上的动点.

(1) 当 E 是棱 PD 的中点时, 求证: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 若 $AB = 1$, $AB \perp AD$, 求点 B 到平面 ACE 距离的范围.



20. (本小题 12 分)

某企业拥有甲、乙两条零件生产线，为了解零件质量情况，采用随机抽样方法从两条生产线共抽取 180 个零件，测量其尺寸（单位：mm）得到如下统计表，其中尺寸位于 $[55, 58)$ 的零件为一等品，位于 $[54, 55)$ 和 $[58, 59)$ 的零件为二等品，否则零件为三等品。

生产线	$[53, 54)$	$[54, 55)$	$[55, 56)$	$[56, 57)$	$[57, 58)$	$[58, 59)$	$[59, 60]$
甲	4	9	23	28	24	10	2
乙	2	14	15	17	16	15	1

(1) 完成 2×2 列联表，依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验能否认为零件为一等品与生产线有关联？

	一等品	非一等品	合计
甲			
乙			
合计			

(2) 将样本频率视为概率，从甲、乙两条生产线中分别随机抽取 1 个零件，每次抽取零件互不影响，以 ξ 表示这 2 个零件中一等品的数量，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$ 。

(3) 已知该企业生产的零件随机装箱出售，每箱 60 个。产品出厂前，该企业可自愿选择是否对每箱零件进行检验。若执行检验，则每个零件的检验费用为 5 元，并将检验出的三等品更换为一等品或二等品；若不执行检验，则对卖出的每个三等品零件支付 120 元赔偿费用。现对一箱零件随机检验了 20 个，检出了 1 个三等品。将从两条生产线抽取的所有样本数据的频率视为概率，以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望作为决策依据，是否需要对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由。

附：
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$
，其中 $n = a + b + c + d$ ； $\chi_{0.05} = 3.841$

21. (本小题 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 短轴

的顶点分别为 B_1, B_2 , 四边形 $B_1F_1B_2F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, A, B (点 A 在 x 轴的上方) 为椭圆上的两点, 点 M 在 x 轴上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $\overline{AM} = 2\overline{MB}$, 且直线 AB 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{4}{7}$ 相切于点 N , 求 $|MN|$.

22. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 1, g(x) = \ln x + a (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a = 1, f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, t)$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公切线, 求实数 a 的取值范围.