2022 北京门头沟高三（上）期末

数　　学

2022.01

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

（1）复数 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(2\mathrm{i})=$

（A）$-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$　　（B）$2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$　　（C）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（D）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

（2）集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-2,-1,0,1,2,3\}$　　（B）$\{-2,-1,0,1\}$　　（C）$\{-1,0,1,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

（3）在 $(x^2-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^4 的系数是

（A）20　　（B）10　　（C）-10　　（D）-20

（4）“角 α,β 的终边关于 x 轴对称”是“$\sin\alpha+\sin\beta=0$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

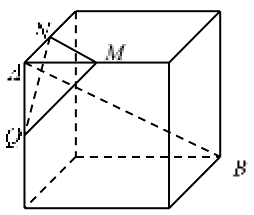
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 为增函数的是

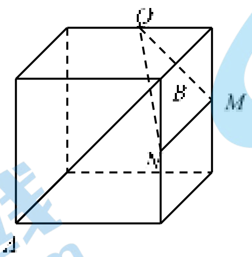
（A）$y=\tan x$　　（B）$y=\mathrm{e}^{|x-1|}$

（C）$y=\ln\frac{1}{x}$　　（D）$y=(x-1)\mathrm{e}^{x-2}$

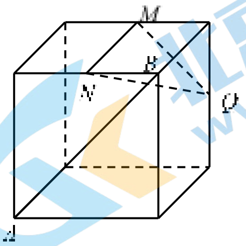
（6）如图，在下列四个正方体中，A,B 为正方体的两个顶点，M,N,Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不垂直的是



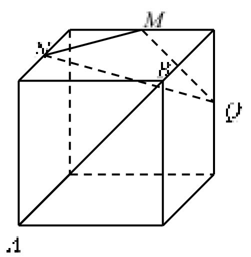
（A）



（B）



（C）



（D）

（7）等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq 0$，数列$\{2^{a_n}\}$的前n项和$S_n=3^n+k$，则

（A）$d=\log_3 2$，$k=-1$　　（B）$d=\log_2 3$，$k=0$

（C）$d=\log_2 3$，$k=-1$　　（D）$d=\log_3 2$，$k=0$

（8）点P在抛物线$y^2=4x$上，则P到直线$x=-1$的距离与到直线$3x-4y+12=0$的距离之和的最小值为

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

（9）在函数$f(x)=ax-2$的图像上存在两个不同点A,B，使得A,B关于直线$y=x$的对称点A',B'在函数$g(x)=\mathrm{e}^x$的图像上，则实数a的取值范围是

（A）$(-\infty,\mathrm{e})$　　（B）$(0,\frac{\mathrm{e}}{2})$　　（C）$(0,\mathrm{e})$　　（D）$(0,\mathrm{e}^2)$

（10）公司在工程招标中是根据技术、商务、报价三项评分标准进行综合评分的，按照综合得分的高低进行排序，排序高者中标。分值权重表如下：

综合得分	技术	商务	报价
100%	50%	10%	40%

技术标、商务标基本都是由公司的技术、资质、资信等实力来决定的。报价标则相对灵活，报价标的评分方法是：基准价的基准分是68分，若报价每高于基准价1%，则在基准分的基础上扣0.8分，最低得分48分；若报价每低于基准价1%，则在基准分的基础上加0.8分，最高得分为80分。若报价低于基准价15%以上(不含15%)每再低1%，在80分在基础上扣0.8分。在某次招标中，若基准价为1000（万元），甲、乙两公司综合得分如下表：

公司	技术	商务	报价
甲	80分	90分	$A_{甲}$分
乙	70分	100分	$A_{乙}$分

甲公司的报价为1100（万元），乙公司的报价为800（万元），则甲、乙两公司综合得分分别是

（A）73分　75.4分　　（B）73分　80分

（C）74.6分　76分　　（D）74.6分　75.4分

第二部分（非选择题　共110分）

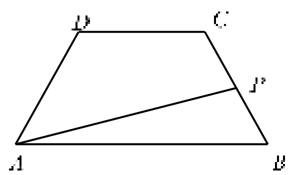
二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，满分25分。）

（11）双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$，则$C$的焦距为________.

（12）已知P为平面上的动点，$A(-1,0)$，$B(1,0)$为平面上两个定点，且$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则动点$P$的轨迹方程为________.

（13）函数$f(x)=\sin 2x$的图像向左平移________个长度单位得到函数$g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图像，若函数$g(x)$在区间$(0,a)$单调递增，则$a$的最大值为________.

（14）在梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$AD=BC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，P是BC的中点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$________.



（15）已知函数 $y=f(x+2)$ 为奇函数，且 $f(x+3)=f(3-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x+\log_4(x+1)-1$，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 图像关于 $(-2,0)$ 对称

② $f(x)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称

③ $f(2021)=\dfrac{1}{2}$

④ $f(x)$ 在区间 $(2021,2022)$ 单调递减

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明。）

（16）（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，$\sqrt{3}(b\cos C+c\cos B)=2a\cos A$.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若 $a=2$，从条件①、条件②、条件③中任选一个作为已知，使△ABC 存在并唯一确定，并求 c 的值.

条件①：$b=2\sqrt{3}$

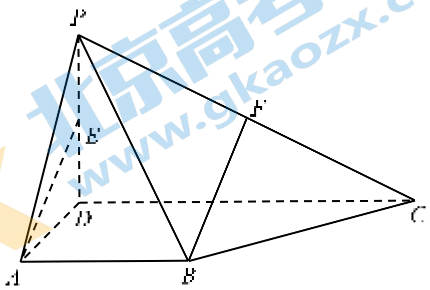
条件②：$b=1$

条件③：$\cos B=-\dfrac{1}{3}$

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB=AD=PD=2$，$DC=4$，$AB//DC$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$PD\perp$ 平面$ABCD$，E，F 分别为 PD，PC 的中点.（Ⅰ）判断直线 AE 与 BF 的位置关系，并说明理由；



（Ⅱ）求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）求点 E 到平面 PBC 的距离.

（18）（本小题满分 13 分）

第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月在北京和张家口举办. 为了普及冬奥知识，京西某校组织全体学生进行了冬奥知识答题比赛，从高一年级（共六个班）答题优秀的学生中随机抽查了 20 名，得到这 20 名优秀学生的统计如下：

高一班级	一（1）	一（2）	一（3）	一（4）	一（5）	一（6）
人数	4	5	4	3	3	1

（Ⅰ）从这 20 名学生中随机抽取两名学生参加区里冬奥知识比赛.

（ⅰ）恰好这 2 名学生都来自同一班级的概率是多少？

（ⅱ）设这 2 名学生中来自高一（2）的人数为 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望；

（Ⅱ）如果该校高中生的优秀率为 0.1，从该校中随机抽取 2 人，这两人中优秀的人数为 η，求 η 的期望.

（19）（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+\ln(1+x)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：$f(x)$ 在区间 $(-1,\pi)$ 存在唯一极大值点；

（Ⅲ）证明：当 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$.

（20）（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的两个端点分别为 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $x=my+1$ 与 C 分别相交于 P_1,P_2 两点，直线 A_1P_1 与 A_2P_2 相交于点 P．试问：当 m 变化时，点 P 是否恒在一条定直线上？若是，请写出这条直线方程，并证明你的结论；若不是，请说明理由.

（21）（本小题满分 15 分）

若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$）满足：对任意 i,j（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$），均存在 k,t（$1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant t\leqslant n$），使得 $(a_j-a_i-a_k)(a_j+a_i-a_t)=0$，则称 A 具有性质 P .

（Ⅰ）判断集合 $M=\{0,3,6,9\}$，$N=\{1,4,6,8\}$ 是否具有性质 P；（只需写出结论）

（Ⅱ）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$）具有性质 P .

（i）求 a_1；

（ii）证明：$\frac{n}{2}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2022 北京门头沟高三（上）期末数学

参考答案

（1）复数 $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(2\mathrm{i})=$

（A）$-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$　（B）$2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$　（C）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　（D）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

解：直接计算可得（A）

（2）集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-2,-1,0,1,2,3\}$　（B）$\{-2,-1,0,1\}$　（C）$\{-1,0,1,2\}$　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

解：易得（C）

（3）在 $(x^2-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^4 的系数是

（A）20　（B）10　（C）-10　（D）-20

解：由通项公式直接计算得（B）

（4）“角 α,β 的终边关于 x 轴对称”是“$\sin\alpha+\sin\beta=0$”的

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

解：由三角函数的定义可得（A）

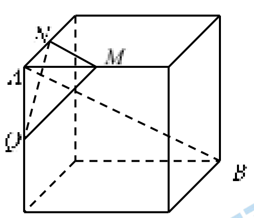
（5）下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 为增函数的是

（A）$y=\tan x$　（B）$y=\mathrm{e}^{|x-1|}$　（C）$y=\ln\frac{1}{x}$　（D）$y=(x-1)\mathrm{e}^{x-2}$

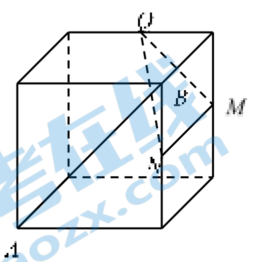
解：A 不正确，在每一个单调区间上增，在 $(0,+\infty)$ 不是增函数；B 是对称轴为 $x=1$，在 $(0,+\infty)$ 不是增函数；C 在 $(0,+\infty)$ 为减函数，D 求导得可 $f'(x)=x\mathrm{e}^{x-2}>0\ (x\in(0,+\infty))$，可知（D）正确

（A）　（B）　（C）　（D）

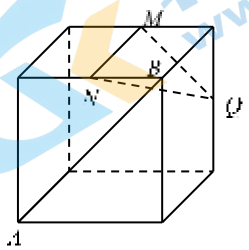
（6）如图，在下列四个正方体中，A,B 为正方体的两个顶点，M,N,Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不垂直的是

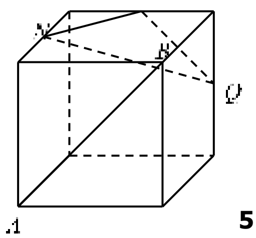


（A）



（B）





（C）　　　　　　　　　　（D）

解：由线面垂直判定定理可得 A,B,C 都符合直线 AB 与平面 MNQ 垂直，但 D 中的 AB 与 MN 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，选择（D）

（7）等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$，数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n + k$，则

（A）$d = \log_3 2,\quad k = -1$　　　　（B）$d = \log_2 3,\quad k = 0$

（C）$d = \log_2 3,\quad k = -1$　　　　（D）$d = \log_3 2,\quad k = 0$

解：设 $b_n = 2^{a_n}$，则 $b_1 = 3 + k$，当 $n \geq 2$ 时，$b_n = S_n - S_{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$，得 $k = -1$，$d = \log_2 3$，选择（C）

（8）点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，则 P 到直线 $x = -1$ 的距离与到直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 的距离之和的最小值为

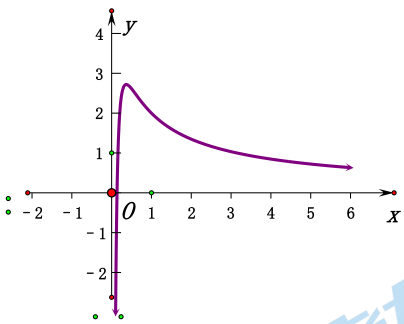
（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

解：由定义得此最小值就是焦点到直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 的距离，由点到直线距离得(B)

（9）在函数 $f(x) = ax - 2$ 的图像上存在两个不同点 A, B，使得 A, B 关于直线 $y = x$ 的对称点 A', B' 在函数 $g(x) = \mathrm{e}^x$ 的图像上，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty, \mathrm{e})$　（B）$(0, \frac{\mathrm{e}}{2})$　（C）$(0, \mathrm{e})$　（D）$(0, \mathrm{e}^2)$

解：由指对函数性质可知，其实就是研究函数 $f(x) = ax - 2$ 与函数 $y = \ln x$ 是否有二个不同交点，当 $a \leqslant 0$ 时，不合 题意；当 $a > 0$ 时，$ax - 2 = \ln x \Rightarrow a = \frac{\ln x + 2}{x}$，有二个交点 得（C）



（10）公司在工程招标中是根据技术、商务、报价三项评分标准进行综合评分的，按照综合得分的高低进行排序，排序高者中标。分值权重表如下：

综合得分	技术	商务	报价
100%	50%	10%	40%

技术标、商务标基本都是由公司的技术、资质、资信等实力来决定的。报价标则相对灵活，报价标的评分方法是：基准价的基准分是 68 分，若报价每高于基准价 1%，则在基准分的基础上扣 0.8 分，最低得分 48 分；若报价每低于基准价 1%，则在基准分的基础上加 0.8 分，最高得分为 80 分。若报价低于基准价 15% 以上(不含 15%)每再低 1%，在 80 分在基础上扣 0.8 分。在某次招标中，若基准价为 1000（万元），甲、乙两公司综合得分如下表：

公司	技术	商务	报价
甲	80 分	90 分	$A_甲$ 分
乙	70 分	100 分	$A_乙$ 分

甲公司的报价为 1100（万元），乙公司的报价为 800（万元），则甲、乙两公司综合得分分别是

（A）73分　75.4分　　　　（B）73分　80分

（C）74.6分　76分　　　　（D）74.6分　75.4分

解：由题意分析可得（A）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。）

（11）双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+y=0$，则 C 的焦距为________.

解: 4

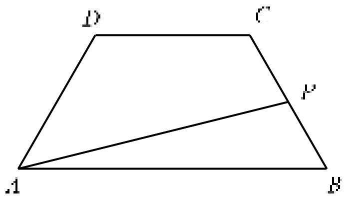
（12）已知 P 为平面上的动点，$A(-1,0)$，$B(1,0)$ 为平面上两个定点，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则动点 P 的轨迹方程为________.

解：由数量积定义得：$x^2+y^2=1$

（13）函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图像向左平移________个长度单位得到函数 $g(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图像，若函数 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$ 单调递增，则 a 的最大值为________.

解：$\dfrac{\pi}{8}$（写出符合条件的一个值即可）；$\dfrac{\pi}{8}$

（14）在梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，$AD=BC=2$，$AB=4$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$P$ 是 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$________.



解：思考一：投影法 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=14$

思考二：几何运算：$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot\overrightarrow{AB}=16+4\times1\times(-\dfrac{1}{2})=14$

思考三：坐标法：以 AB 中点为原点，AB 所在直线为 x 轴，用坐标运算也可。

（15）已知函数 $y=f(x+2)$ 为奇函数，且 $f(x+3)=f(3-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x+\log_4(x+1)-1$，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 图像关于 $(-2,0)$ 对称

② $f(x)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称

③ $f(2021)=\dfrac{1}{2}$

④ $f(x)$ 在区间 $(2021,2022)$ 单调递减

其中所有正确结论的序号是________.

解：函数 $y=f(x+2)$ 为奇函数得：$f(x+2)=-f(-x+2)\Rightarrow f(x)+f(4-x)=0$

可得 $f(x)$ 图像关于关于 $(2,0)$ 对称；由 $f(x+3)=f(3-x)$ 得

$f(x+4)=f(2-x)=-f(x+2)\Rightarrow f(x+2)=-f(x)\Rightarrow T=4$，所以①正确，②正确；

$f(2021)=f(1)=\dfrac{3}{2}$，所以③不正确；④正确.

所以，正确题目的顺序号为①②④

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明。）

（16）（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}(b\cos C+c\cos B)=2a\cos A$.

（Ⅰ）求A；

（Ⅱ）若$a=2$，从条件①、条件②、条件③中任选一个作为已知，使$\triangle ABC$存在并唯一确定，并求c的值.

条件①：$b=2\sqrt{3}$

条件②：$b=1$

条件③：$\cos B=-\frac{1}{3}$

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（Ⅰ）由正弦定理得

$\sqrt{3}(b\cos C+c\cos B)=2a\cos A\Rightarrow\sqrt{3}\sin(B+C)=2\sin A\cos A$ ……………2分

所以$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$ ………………………………………………………2分

（Ⅱ）选条件②

由正弦定理得：$\frac{1}{\sin B}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sin B=\frac{1}{4}$ …………………………………………2分

$b<a\Rightarrow B<A=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\cos B=\frac{\sqrt{15}}{4}$ ……………………………………………2分

$\sin C=\sin(A+B)=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$ …………………………………………………2分

$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$ …………………………………………………2分

注：若利用余弦定理，结论正确同样可得满分。

选条件③

$\cos B=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ …………………………………………………………2分

$\sin C=\sin(A+B)=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$ …………………………………………………2分

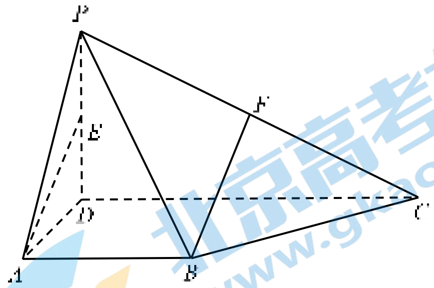
$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow c=\frac{4\sqrt{6}-2}{3}$ …………………………………………………4分

（17）（本小题满分15分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，

$AB=AD=PD=2$， $DC=4$， $AB//DC$， $\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

$PD\perp$平面$ABCD$， E， F 分别为 PD， PC 的中点.



（Ⅰ）判断直线 AE 与 BF 的位置关系，并说明理由；

（Ⅱ）求二面角 $P-BC-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）求点 E 到平面 PBC 的距离.

解：（Ⅰ） $AE//BF$.

连结 EF，因为 E,F 分别是 PD， PC 的中点，所以 $EF \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}CD$ ……………..1 分

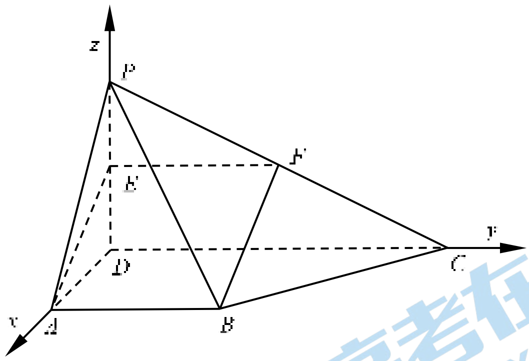
又因为 $AB \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}CD$，所以 $AB \mathrel{\underset{=}{\parallel}} EF$，……………………………………………1 分

所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形，故 $AE//BF$ ……………………………………1 分

注：回答 AE 与 BF 共面，也给满分。

（Ⅱ）由已知 DP,DC,DA 两两垂直，建立如图所示坐标系……………………………..……1 分

$A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,4,0),P(0,0,2)$ ……………2 分



设平面 PBC 法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=0\\ x+y-z=0\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{n}_1=(1,1,2)$ ..2 分

平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$ …………1 分

$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……………2 分

二面角 $P-BC-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ………………………………………...………1 分

（Ⅲ） $E(0,0,1)$， $\overrightarrow{EB}=(2,2,-1)$ ………………………………………………………….……1 分

设点 E 到平面 PBC 的距离为 d，则 $d=|\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}_1|}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………………2 分

（18）（本小题满分 13 分）

第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月在北京和张家口举办. 为了普及冬奥知识，京西某校组织全体学生进行了冬奥知识答题比赛，从高一年级（共六个班）答题优秀的学生中随机抽查了 20 名，得到这 20 名优秀学生的统计如下：

高一班级	一（1）	一（2）	一（3）	一（4）	一（5）	一（6）
人数	4	5	4	3	3	1

（Ⅰ）从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生参加区里冬奥知识比赛.

（i）恰好这 2 名学生都来自同一班级的概率是多少？

（ii）设这 2 名学生中来自高一（2）的人数为 ξ，求 ξ 的分布列及数学期望；

（Ⅱ）如果该校高中生的优秀率为0.1，从该校中随机抽取 2 人，这两人中优秀的人数为 η，求 η 的期望.

解:（Ⅰ）（i）20 名学生中随机抽取两名学生共有 $C_{20}^2=190$ ………………………..……...…2 分

设恰好 2 名学生都来自同一班级共有 $C_4^2+C_5^2+C_4^2+C_3^2+C_3^2=28$ …………...….1 分

$P(A)=\frac{28}{19\times10}=\frac{14}{95}$ ……………………………………………………………...….1 分

注：如果没有设，有答不扣分，没有设，也没有答扣 1 分

（ii）ξ 可取 0，1，2，……………………………………………………………….1 分

$P(\xi=0)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{105}{190}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{15}^1C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{75}{190}$，$P(\xi=2)=\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{10}{190}$ ………...3 分

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{105}{190}$	$\frac{75}{190}$	$\frac{10}{190}$

……………………………...….1 分

ξ 的期望 $E\xi=\frac{75\times1}{190}+\frac{10\times2}{190}=\frac{1}{2}$ ……………………………………….……....1 分

（Ⅱ）η 可取 0，1，2，……………………………………………………………………….1 分

$\eta\sim B(2,0.1)$，所以 $E\eta=0.1\times2=0.2$ ……………………………........…………2 分

注：只写出 $E\eta=0.1\times2=0.2$，不扣分.

（19）（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+\ln(1+x)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：$f(x)$ 在区间 $(-1,\pi)$ 存在唯一极大值点；

（Ⅲ）证明：当 $x\geqslant0$，$f(x)\geqslant0$.

解：（Ⅰ）$f'(x)=\cos x+\frac{1}{1+x}$ ……………………………………..…………………2 分

$f'(0)=2$，$f(0)=0$，得切线方程为 $2x-y=0$ ………………………………2 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=\cos x+\frac{1}{1+x}$，$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$ …………………..1 分

$x\in[0,\pi)$ 时，$f'(x)$ 单调递减，$f'(0)=2$，$f'(\pi)=-1+\frac{1}{\pi+1}<0$，…………2 分

由零点存在定理可得，$f'(x)$ 在 $x\in(-1,\pi)$ 存在唯一一个零点 x_0，…………1 分

且当 $x\in(-1,x_0)$, $f'(x_0)>0$，$x\in(x_0,\pi)$, $f'(x_0)<0$，

所以，$f(x)$ 在区间 $(-1,\pi)$ 存在唯一极大值点．……………………………2 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知，$f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 单调递减，…….1 分

$f(0)=0$，$f(\pi)=\ln(1+\pi)>0$，所以，当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)\geqslant0$ ……….……2 分

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$f(x)=\sin x+\ln(1+x)>\ln(1+\pi)-1>0$．…………...………2 分

（20）（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的两个端点分别为 $A_1(-2,0), A_2(2,0)$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $x=my+1$ 与 C 分别相交于 P_1, P_2 两点，直线 A_1P_1 与 A_2P_2 相交于点 P．试问：当 m 变化时，点 P 是否恒在一条定直线上？若是，请写出这条直线方程，并证明你的结论；若不是，请说明理由.

解：（Ⅰ）由题意得：$a=2, c=\sqrt{3} \Rightarrow b=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………………….3 分

（Ⅱ）若 $m=0$，$l: x=1$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 $P_1(1,\frac{\sqrt{3}}{2}), P_2(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$．…………..1 分

直线 A_1P_1：$y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$，直线 $A_2P_2: y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)$．…………………………1 分

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2) \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2) \end{cases} \Rightarrow P(4,\sqrt{3})．$$ ……………………………………………………….…………1 分

由椭圆的对称性若 $P_1(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}), P_2(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 可得交点为 $P(4,-\sqrt{3})$．………...……….1 分

当 m 变化时，点 P 恒在定直线 $x=4$ 上．……………………………… …………1 分

若 $m\neq 0$ 时，$\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (m^2+4)y^2+2my-3=0$．……………………………1 分

设交点为 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$，由韦达定理得：$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4} \\ y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4} \end{cases}$（1）…...……..1 分

直线 A_1P_1：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ 与定直线 $x=4$ 相交于 $M(4,t_1)$，得 $t_1=\frac{6y_1}{x_1+2}$．…..1 分

同理直 $A_2P_2: y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 与直线 $x=4$ 相交于 $N(4,t_2)$，得 $t_2=\frac{2y_2}{x_2-2}$．…..1 分

$$t_1-t_2=\frac{6y_1}{x_1+2}-\frac{2y_2}{x_2-2}=2\frac{3y_1(my_2-1)-y_2(my_1+3)}{(x_1+2)(x_2-2)}=2\frac{2my_1y_2-3(y_1+y_2)}{(x_1+2)(x_2-2)}．$$ ……2 分

（1）式代入得 $t_1=t_2$，所以当 m 变化时，点 P 恒在一条定直线 $x=4$ 上．………1 分

（21）（本小题满分 15 分）

若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$）满足：对任意 i,j（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$），均存在 k,t（$1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant t\leqslant n$），使得 $(a_j-a_i-a_k)(a_j+a_i-a_t)=0$，则称 A 具有性质 P．

（Ⅰ）判断集合 $M=\{0,3,6,9\}$，$N=\{1,4,6,8\}$ 是否具有性质 P；（只需写出结论）

（Ⅱ）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$）具有性质 P．

（i）求 a_1；

（ii）证明：$\frac{n}{2}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

解：（Ⅰ）集合 M 具有性质 P；……………………………………………………...…….2 分

集合 N 不具有性质 P．……………………………………………... ………2 分

（Ⅱ）（i）取 $i=j=n$，由题知存在 k,t（$1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant t\leqslant n$），使得 $(a_n-a_n-a_k)(a_n+a_n-a_t)=0$ 成立，即

$-a_k(2a_n-a_t)=0$，…………...…2 分

又 $2a_n>a_t$，故必有 $a_k=0$．…………....……………….……………………..2 分

又因为 $0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，所以 $a_1=0$．……...………………...….1 分

（ii）由（i）得 $a_1=0$，当 $i\geqslant 2$ 时，存在 k,t（$1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant t\leqslant n$）使得 $(a_n-a_i-a_k)(a_n+a_i-a_t)=0$ 成立，又因为 $a_n+a_i-a_t=(a_n-a_t)+a_i>0$，故 $a_n-a_i-a_k=0$，即 $a_n-a_i=a_k$．所以 $a_n-a_i\in A\,(i=1,2\cdots,n)$．……….2 分

又 $0=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$，所以 $a_n-a_1>a_n-a_2>\cdots>a_n-a_{n-1}>a_n-a_n$，

故 $a_n-a_1=a_n, a_n-a_2=a_{n-1},\cdots,a_n-a_{n-1}=a_2, a_n-a_n=a_1$，…………….. 2 分

相加得：

$na_n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，即 $\frac{n}{2}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

………………..2 分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了**【2022 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总】**专题，及时更新最新试题及答案。

通过**【北京高考资讯】公众号**，**对话框回复【期末】**或者**底部栏目<试题下载→期末试题>**，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！