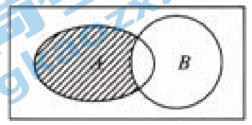
鄂南高中黄冈高中黄石二中荆州中学龙泉中学
武汉二中孝感高中襄阳四中襄阳五中宜昌一中夷陵中学
2022 届高三湖北十一校第二次联考
数学试题

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若全集 $U=R$，集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，则图中阴影部分表示的集合为



A. $\{3,4,5\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{4,5\}$

2.直线 $kx+y-2-3k=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的位置关系是

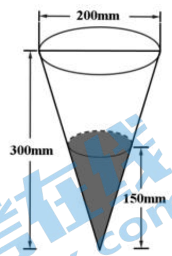
A．相离　　B．相切　　C．相交　　D．相交或相切

3.祖暅原理"幂势既同，则积不容异"，说的是两个同高的几何体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等. 设 A、B 为两个同高的几何体．现有命题 p：A、B 的体积相等，命题 q：A、B 在等高处的截面积恒相等. 根据祖暅原理可知，p 是 q 的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.气象学中用 24 小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度.其中小雨（<10mm），中雨（10mm−25mm），大雨（25mm−50mm），暴雨（50mm−100mm），小明用一个圆锥形容器接了 24 小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级



A．小雨　　B．中雨

C．大雨　　D．暴雨

5.已知 a，b 为正实数，直线 $y=x-2a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值是

A.6　　B. $4\sqrt{2}$　　C.8　　D. $2\sqrt{2}$

6.如图为宜昌市至喜长江大桥，其缆索两端固定在两侧索塔顶部，中间形成的平面曲线称为悬链线．当微积分尚未出现时，伽利略猜测这种形状是抛物线，直到 1691 年莱布尼兹和伯努利借助微积分推导出悬链线的方程 $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$，其中 c 为参数．当 $c=1$ 时，函数 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 称为双曲余弦函数，与之对应的函数 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 称为双曲正弦函数．关于双曲函数，下列结论正确的是

A. $[\sinh(x)]^2-[\cosh(x)]^2=1$　　B. $(\cosh(x))'=-\sinh(x)$

C. $\cosh(-1)>\cosh(2)$　　D. $\sinh(-x)=-\sinh(x)$

7.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的左支交于 A、B 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，$\angle ABF_2=90°$，则 C 的渐近线方程为

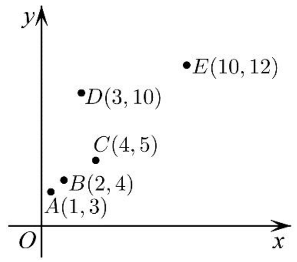
A． $y=\pm 2x$　　B． $y=\pm\sqrt{5}x$　　C． $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$　　D． $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}x$

8.已知 α、β、γ、δ 为锐角，在 $\sin\alpha\cos\beta$，$\sin\beta\cos\gamma$，$\sin\gamma\cos\delta$，$\sin\delta\cos\alpha$ 四个值中，大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值记为 m，小于 $\frac{1}{4}$ 的个数的最大值记为 n，则 $m+n$ 等于

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题列出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.

9.如图，5 个数据 (x,y)，去掉点 $D(3,10)$ 后，下列说法正确的是



A．相关系数 r 变大

B．残差平方和变大

C．变量 x 与变量 y 呈正相关

D．变量 x 与变量 y 的相关性变强

10.平行四边形 $ABCD$ 中， $AB>AD$，将三角形 ABD 沿着 BD 翻折至三角形 $A'BD$，则下列直线中有可能与直线 $A'B$ 垂直的是

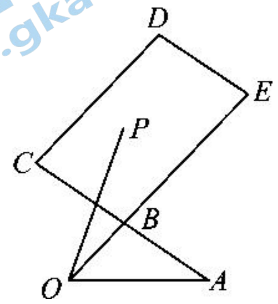
A.直线 BC　　B.直线 CD　　C.直线 BD　　D.直线 $A'C$

11.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 S_n，已知 $4S_n=a_n^{\ 2}+2a_n+1$，下列说法中正确的是

A. $\{a_n\}$ 为等差数列　　B. $\{a_n\}$ 可能为等比数列

C. $\{a_n\}$ 为等差数列或等比数列　　D. $\{a_n\}$ 可能既不是等差数列也不是等比数列

12.如下图所示，B 是 AC 的中点，$\overline{BE}=2\overline{OB}$，$P$ 是平行四边形 $BCDE$ 内(含边界)的一点，且 $\overline{OP}=x\overline{OA}+y\overline{OB}\left(x,y\in R\right)$，以下结论中正确的是



A.当 P 是线段 CE 的中点时，$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{9}{4}$

B.当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y\in[\dfrac{3}{2},4]$

C.若 $x+y$ 为定值 2 时，则在平面直角坐标系中，点 P 的轨迹是一条线段

D. $x-y$ 的最大值为 -1

三、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$（其中 i 是虚数单位），则 $|z|=$_______.

14.8^{11} 除以 9 的余数是_______.

15.已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-m$，$x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $m(x_1+2x_2+x_3)$ 的范围是_______.

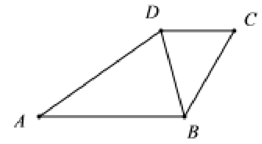
16.若指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）与三次函数 $y=x^3$ 的图象恰好有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围是_______.

四、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（10 分）.如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$.

（1）求 $\cos\angle BDC$；

（2）求 BC 的长.

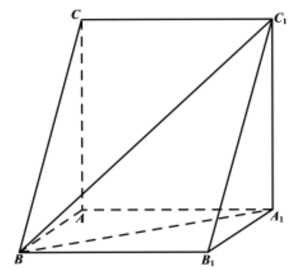


18（12 分）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=10$，$a_4-a_3=2$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_3$，$b_3=a_7$ 设 $c_n=5a_n-b_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_n 的最大值.

19（12 分）. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形，$AB=3$.再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知，并作答.



（1）求证：$AB\perp$ 平面 AA_1C_1C；

（2）求直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值.

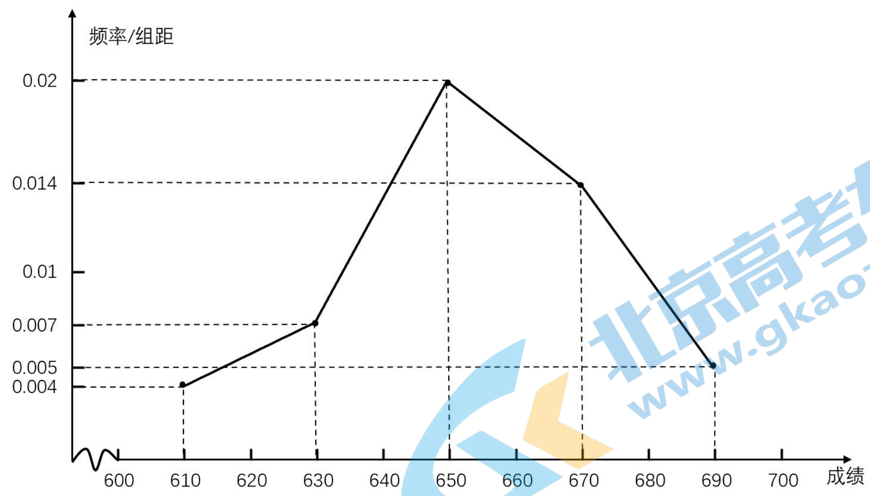
条件①：$BC=5$；条件②：$AB\perp AA_1$；条件③：平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C.

20（12 分）. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)直线 $y=k(x+1)(k\neq0)$ 与椭圆交于 A、B 两点，过 A、B 作直线 $l:x=-2$ 的垂线，垂足分别为 M、N，点 G 为线段 MN 的中点，F 为椭圆 C 的左焦点．求证：四边形 $AGNF$ 为梯形.

21．（12 分）某中学在 2021 年高考分数公布后对高三年级各班的成绩进行分析．经统计，某班有 50 名同学，总分都在区间 $[600,700]$ 内，将得分区间平均分成 5 组，统计频数、频率后，得到了如图所示的“频率分布”折线图．



（1）请根据频率分布折线图，画出频率分布直方图，并根据频率分布直方图估计该班级的平均分；

（2）经过相关部门的计算，本次高考总分大于等于 680 的同学可以获得高校 T 的“强基计划”入围资格．高校 T 的“强基计划”校考分为两轮．第一轮为笔试，所有入围同学都要参加，考试科目为数学和物理，每科的笔试成绩从高到低依次有 A^+,A,B,C 四个等级，两科中至少有一科得到 A^+，且两科均不低于 B，才能进入第二轮，第二轮得到“通过”的同学将被高校 T 提前录取．

已知入围的同学参加第一轮笔试时，总分高于 690 分的同学在每科笔试中取得 A^+,A,B,C 的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$；总分不超过 690 分的同学在每科笔试中取得 A^+,A,B,C 的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$；进入第二轮的同学，若两科笔试成绩均为 A^+，则免面试，并被高校 T 提前录取；若两科笔试成绩只有一个 A^+，则要参加面试，总分高于 690 分的同学面试“通过”的概率为 $\frac{2}{3}$，总分不超过 690 分的同学面试“通过” 的概率为 $\frac{2}{5}$，面试“通过”的同学也将被高校 T 提前录取．

若该班级考分前 10 名都已经报考了高校 T 的“强基计划”，且恰有 2 人成绩高于 690 分．求

①总分高于 690 分的某位同学没有进入第二轮的概率 P_1；

②该班恰有两名同学通过“强基计划” 被高校 T 提前录取的概率 P_2．

22．（12 分）对于正实数 a，$b(a>b)$ 有基本不等式：$G(a,b)<A(a,b)$，其中 $A(a,b)=\frac{a+b}{2}$，为 a,b 的算术平均数，$G(a,b)=\sqrt{ab}$，为 a,b 的几何平均数．现定义 a,b 的对数平均数：$L(a,b)=\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$．

(1) 设 $x>1$，求证：$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$；

(2) ①证明不等式：$G(a,b)<L(a,b)$；

②若不等式 $k\cdot L(a,b)<G(a,b)+A(a,b)$ 对于任意的正实数 $a,b(a>b)$ 恒成立，求正实数 k 的最大值．

鄂南高中 黄冈高中 黄石二中 荆州中学 龙泉中学
武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学
2022 届高三湖北十一校第二次联考
数学答案

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题列出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	B	C	D	C	B	ACD	AB	BD	CD

8.因为 α 、 β 、 γ 、 δ 为锐角，则 $\sin\alpha\cos\beta \le \dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$，当且仅当 $\sin\alpha=\cos\beta$ 时取等号，

同理 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\delta+\sin\delta\cos\alpha \le 2$，

故不可能有 4 个数都大于 $\frac{1}{2}$，所以最多三个数大于 $\frac{1}{2}$，

例如 $\alpha=45°,\beta=44°,\gamma=30°,\delta=60°$，所以 $m=3$，

$0<\sin\alpha\cos\beta\ \sin\beta\cos\gamma\ \sin\gamma\cos\delta\ \sin\delta\cos\alpha=\dfrac{1}{16}\sin2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\sin2\delta\cdot\sin2\gamma\le\dfrac{1}{16}$，

故最多有 4 个数均小于 $\frac{1}{4}$，所以 $n=4$，例如 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=80°$，

所以 $m+n=7$.故选：B.

三、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\sqrt{2}$　　14. 8

15. $\left[\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{10\pi}{3}\right)$　　16. $\left(1,e^{\frac{3}{e}}\right)$

四、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（1）因为 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， $\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$，则 A 、 $\angle ADB$ 均为锐角，

所以， $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\cos\angle ABD=\cos(\pi-A-\angle ADB)=-\cos(A+\angle ADB)=\sin A\sin\angle ADB-\cos A\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，

$\because AB//CD$，则 $\angle BDC=\angle ABD$，因此， $\cos\angle BDC=\cos\angle ABD=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$；　（5 分）

（2）在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin A}$，可得 $BD=\dfrac{AB\sin A}{\sin\angle ADB}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3$，

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC=9+6-2\cdot3\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{9}=11$，

因此， $BC=\sqrt{11}$.　（10 分）

18.（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=a_4-a_3=2$，

又 $a_1+a_2=10$，得 $a_1+a_1+2=10$，解得 $a_1=4$，所以 $a_n=4+2(n-1)=2n+2$；　（2 分）

（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $b_2=a_3=8$， $b_3=a_7=16$，所以 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{16}{8}=2$， $b_1=\dfrac{b_2}{q}=4$，

所以 $b_6=4\times2^5=2^7=128$， $b_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，则 $c_n=5a_n-b_n=5(2n+2)-2^{n+1}$，　（4 分）

所以 $S_n=5\left[4+6+\ldots+(2n+2)\right]-\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}=5\times\dfrac{n(4+2n+2)}{2}-4(2^n-1)=-2^{n+2}+5n^2+15n+4$，　（6 分）

令 $f(x)=-2^{x+2}+5x^2+15x+4(x\in N_+)$，则 $f'(x)=-2^{x+2}\ln2+10x+15$，

由于 $x\in N_+$，当 $1\le x\le4$ 时， $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\geqslant5$ 时， $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

且 $f(5)=-128+125+75+4=76$， $f(4)=-64+80+60+4=80$，

所以当 $n=4$ 时， S_n 有最大值且最大值为 $S_4=80$.　（12 分）

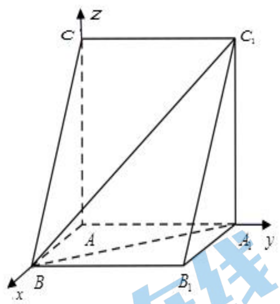
19.选择①②：（1）因为 $AC=4$， $AB=3$， $BC=5$，所以 $AB\perp AC$.

又因为 $AB\perp AA_1$， $AC\cap AA_1=A$，所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C.

选择①③：（1）因为 $AC=4$， $AB=3$， $BC=5$，所以 $AB\perp AC$.

又因为平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1C_1C=AC$，所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C.　（4 分）

（2）由（1）知 $AB\perp AC$，$AB\perp AA_1$，因为四边形 AA_1C_1C 是正方形，所以 $AC\perp AA_1$.如图，以 A 为原点建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(0,0,4)$，$A_1(0,4,0)$，$C_1(0,4,4)$，

$\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$.

设平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x-4y=0,\\ 4z=0.\end{cases}$，令 $y=3$，则 $x=4$，$z=0$，所以 $\vec{n}=(4,3,0)$.

设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\dfrac{12}{25}$.

所以直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{12}{25}$.（8 分）

20.(1)解：由已知得 $\begin{cases}b=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=c=1\end{cases}$，∴椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.（3 分）

(2)证明：由（1），椭圆的左焦点 $F(-1,0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $M(-2,y_1),N(-2,y_2)$，$G\left(-2,\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

$k_{AG}=\dfrac{y_1-\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)}{x_1+2}=\dfrac{y_1-y_2}{2(x_1+2)}$，$k_{FN}=\dfrac{y_2-0}{-2+1}=-y_2$.

∵直线 $y=k(x+1)(k\neq0)$ 与椭圆交于 A、B 两点，∴ $y_1=k(x_1+1),y_2=k(x_2+1)$，

由于直线 $y=k(x+1)(k\neq0)$ 与直线 $l:x=-2$ 不平行，

∴四边形 $AGNF$ 为梯形的充分必要条件是 $AG//FN$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{2(x_1+2)}=-y_2$，

即 $y_1+3y_2+2x_1y_2=0$，即 $k(x_1+1)+3k(x_2+1)+2x_1k(x_2+1)=0$，

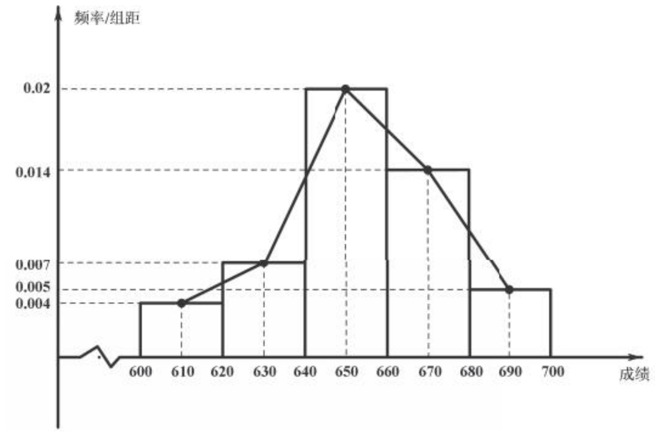
∵ $k\neq0$，∴上式又等价于 $(x_1+1)+3(x_2+1)+2x_1(x_2+1)=0$，即 $3(x_1+x_2)+2x_1x_2+4=0$（*）.（8 分）

由 $\begin{cases}y=k(x+1)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，∴ $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$，

$3(x_1+x_2)+2x_1x_2+4=3\times\left(-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}\right)+2\times\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}+4=\dfrac{-12k^2+4k^2-4+4+8k^2}{1+2k^2}=0$，

∴（*）成立，∴四边形 $AGNF$ 为梯形.（12 分）

21.（1）



（2 分）

平均分：$\bar{x}=(610\times0.004+630\times0.007+650\times0.02+670\times0.014+690\times0.005)\times20=653.6$（4 分）

（2）总分大于等于 680 分的同学有 $50\times0.005\times20=5$ 人，

由已知，其中有 3 人小于等于 690 分，2 人大于 690 分；

① $P_1=1-P\left(A^+A^++A^+A+A^+B\right)=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{6}-C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{12}=1-\dfrac{4}{9}-\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{9}$（8 分）

②设高于 690 分的同学被高校 T 提前录取为事件 M，不超过 690 分的同学被高校 T 提前录取为事件 N，则 $P(M)=P\left(A^+A^+\right)+\dfrac{2}{3}P\left(A^+A+A^+B\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\left(C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{6}+C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{2}{3}$

$P(N)=P\left(A^+A^+\right)+\dfrac{2}{5}P\left(A^+A+A^+B\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{5}\left(C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{2}{9}$

$P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{7}{9}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times C_3^2\left(\dfrac{7}{9}\right)\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times C_3^1\times\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{7}{9}\right)^2=\dfrac{1372}{3^8}+\dfrac{84}{3^8}+\dfrac{1176}{3^8}=\dfrac{2632}{6561}$

（12 分）

22.(1)令 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，有 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}$

所以 $f'(x)\le 0$，得 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $f(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，因此，当 $x>1$ 时，$\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ （4 分）

(2)（ⅰ）要证 $G(a,b)<L(a,b)$，只要证 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$，

只要证 $\ln\frac{b}{a}<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$，即证 $2\ln\sqrt{\frac{a}{b}}<\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$，

令 $t=\sqrt{\frac{a}{b}},(t>1)$，由（1）有 $\ln t<\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$，即得 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$，因此，$2\ln\sqrt{\frac{a}{b}}<\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$ （6 分）

（ⅱ）由 $k\cdot L(a,b)<G(a,b)+A(a,b)$ 恒成立，

得 $k\cdot\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}$ 恒成立，即得 $k\cdot\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln\frac{a}{b}}<\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+1\right)$ 恒成立，

令 $t=\sqrt{\frac{a}{b}},(t>1)$，有 $k\cdot\frac{t^2-1}{2\ln t}<t+\frac{1}{2}(t^2+1)$ 恒成立，

得 $k\cdot\frac{t-1}{2\ln t}<\frac{1}{2}(t+1)$ 恒成立，所以 $k\cdot\frac{t-1}{t+1}-\ln t<0$ 恒成立

令 $g(t)=k\cdot\frac{t-1}{t+1}-\ln t$，有 $g'(t)=k\cdot\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=\frac{2kt-(t+1)^2}{(t+1)^2\cdot t}=\frac{-t^2+2(k-1)t-1}{(t+1)^2\cdot t}$，（注：$g(1)=0$）

ⅰ当 $g'(1)>0$ 时，即 $k>2$ 时，易知方程 $-t^2+2(k-1)t-1=0$ 有一根 t_1 大于 1，一根 t_2 小于 1，

所以 $g(t)$ 在 $[1,t_1)$ 上单调递增，故有 $g(t_1)>g(1)=0$，不符；

ⅱ当 $0<k\le 2$ 时，有 $2kt-(t+1)^2\le 4t-(t+1)^2=-(t-1)^2\le 0$，

所以 $g'(t)\le 0$，从而 $g(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

故当 $t>1$ 时，恒有 $g(t)<g(1)=0$，符合.

由ⅰ、ⅱ可知，正实数 k 的取值范围为 $0<k\le 2$，

因此，正实数 k 的最大值为 2. （12 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。