北京市第十三中学 2022～2023 学年第一学期

高三数学期中测试

2022.11

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷第 1 页至第 2 页；第II卷第 3 页至第 6 页，答题纸第 1 页至第 4 页．共 150 分，考试时间 120 分钟．请在答题纸第 1 页上方密封线内书写班级、姓名、准考证号．考试结束后，将本试卷的答题卡一并交回．

第I卷（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-3,4)$，则 $\cos\theta=$

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AD, BD_1 所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{2}$　　B $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 已知公差为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_1，a_2，a_4 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和为

A. 55　　B. 50　　C. 45　　D. 10

4. 函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形，如果它的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{2},0)$，那么 $f(x)$ 的解析式可以是

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $\sin x+1$　　D. $\cos x+1$

5. 函数① $f(x)=\sin x+\cos x$，② $f(x)=\sin x\cos x$，③ $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$ 中，周期是 π 且为奇函数的所有函数的序号是

A.①②　　B.②　　C.③　　D.②③

6. “角 α,β 的终边关于原点 O 对称”是“$\cos(\alpha-\beta)=-1$”的

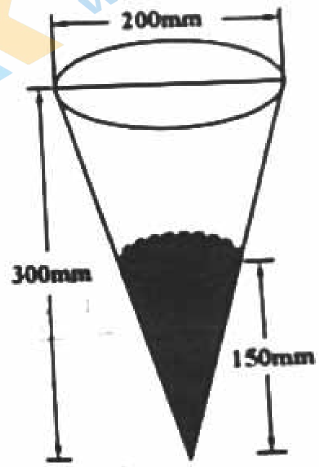
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7. 已知点$A(0,0)$，$B(2,0)$．若椭圆$W:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$上存在点$C$，使得$\Delta ABC$为等边三角形，则椭圆$W$的离心率是

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm－25mm），大雨（25mm－50mm），暴雨（50mm－100mm），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级



A. 小雨　　B. 中雨

C. 大雨　　D. 暴雨

9. 已知正三棱锥$P-ABC$的六条棱长均为6，S是ΔABC及其内部的点构成的集合．设集合$T=\{Q\in S \mid PQ\le 5\}$，则$T$表示的区域的面积为

A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

10. 在ΔABC中，$AC=3, BC=4, \angle C=90^\circ$．$P$为$\Delta ABC$所在平面内的动点，且$PC=1$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是

A. $[-4,6]$　　B. $[-3,5]$　　C. $[-6,4]$　　D. $[-5,3]$

第II卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

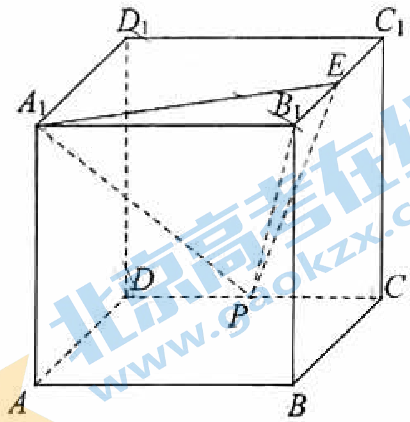
11．在复平面内，复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为__________.

12. 已知 a，b 是单位向量，$c=a+2b$.若 $a\perp c$，则 $|c|=$__________.

13. 已知圆 C 过点 $A(-1,2),B(1,0)$，则圆心 C 到原点距离的最小值为__________.

14. 将函数 $f(x)=sin2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$________；若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最小值为 $g(0)$，则 m 的最大值为______.

15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 B_1C_1 的中点. 动点 P 沿着棱 DC 从点 D 向点 C 移动，对于下列四个结论：



①存在点 P，使得 $PA_1=PE$；

②存在点 P，使得平面 $PA_1E\perp$ 面 BDD_1B_1；

③ ΔPA_1E 的面积越来越小；

④四面体 A_1PB_1E 的体积不变.

所有正确的结论的序号是________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）.

16. (本小题满分 13 分)

在 ΔABC 中，$a+b=11$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

(I) a 的值；

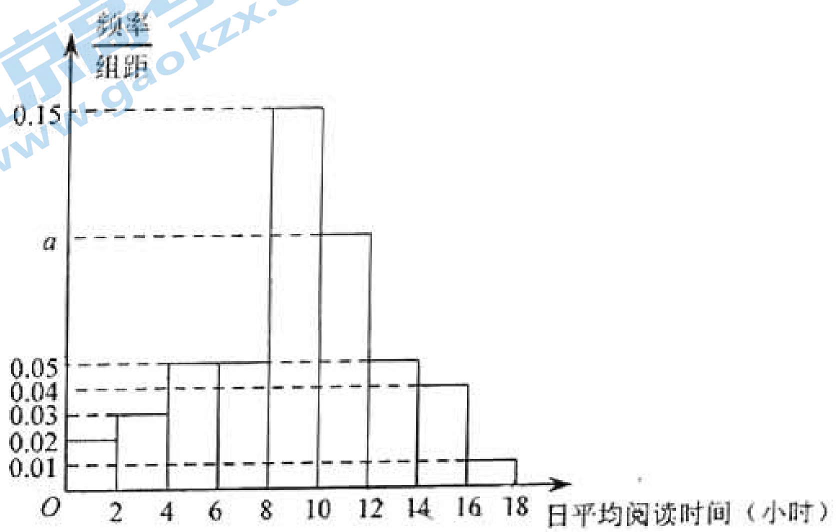
(II) $\sin C$ 和 ΔABC 的面积.

条件①：$c=7,\cos A=-\dfrac{1}{7}$；　　　条件②：$\cos A=\dfrac{1}{8},\cos B=\dfrac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题共 14 分）

每年的 4 月 23 日是联合国教科文组织确定的“世界读书日”，又称“世界图书和版权日”.为了解某地区高一学生阅读时间的分配情况，从该地区随机抽取了 500 名高一学生进行在线调查，得到了这 500 名学生的日平均阅读时间（单位：小时），并将样本数据分成$[0,2]$，$(2,4]$，$(4,6]$，$(6,8]$，$(8,10]$，$(10,12]$，$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



（I）求 a 的值；

（II）为进一步了解这 500 名学生数字媒体阅读时间和纸质图书阅读时间的分配情况，从日平均阅读时间在$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了 10 人，现从这 10 人中随机抽取 3 人，记日平均阅读时间在$(14,16]$内的学生人数为 X，求 X 的分布列；

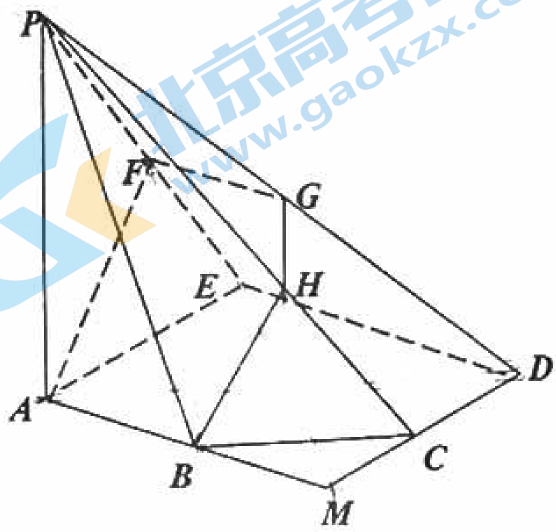
（III）以调查结果的频率估计概率，从该地区所有高一学生中随机抽取 20 名学生，用“$P_{20}(k)$”表示这 20 名学生中恰有 k 名学生日平均阅读时间在$(10,12]$（单位：小时）内的概率(其中 $k=0,1,2,\cdots,20$).当 $P_{20}(k)$ 最大时，写出 k 的值.（只需写出结论）

18. （本小题满分 15 分）

如图，正方形 $AMDE$ 的边长为 2，B，C 分别为 AM 和 MD 的中点，在五棱锥 $P-ABCDE$ 中，F 为 PE 的中点，平面 ABF 与棱 PD，PC 分别相交于点 G、H.

（I）求证：$AB//FG$；

（II）若 $PA\perp$ 平面 $ABCDE$，且 $PA=AE$，求直线 BC 与平面 ABF 所成的角，并求线段 PH 的长.



19.（本小题满分 15 分）

已知点 $A(0,-1)$ 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

（I）求椭圆 C 的方程和离心率；

（II）设直线 $l:y=k(x-1)$（其中 $k\neq 1$）与椭圆 C 交于不同两点 E,F，直线 AE，AF 分别交直线 $x=3$ 于点 M，N. 当 ΔAMN 的面积为 $3\sqrt{3}$ 时，求 k 的值.

20.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求 $f(x)$ 的单调区间；

（III）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，

求证：

21.(本小题满分 13 分)

各项均为非负整数的数列$\{a_n\}$同时满足下列条件：

①$a_1=m$ $(m\in N^*)$；②$a_n\le n-1$ $(n\ge 2)$；③n是$a_1+a_2+\cdots+a_n$的因数（$n\ge 1$）.

（I）当$m=5$时，写出数列$\{a_n\}$的前五项；

（II）若数列$\{a_n\}$的前三项互不相等，且$n\ge 3$时，a_n为常数，求m的值；

（III）求证：对任意正整数m，存在正整数M，使得$n\ge M$时，a_n为常数.

北京市第十三中学 2022～2023 学年第一学期

高三数学期中测试答案及评分标准

2022.11

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	B	D	C	C	B	B	A

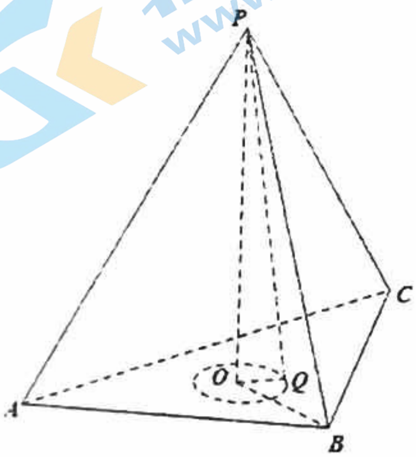
二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11） $(-1,1)$ （12） $\sqrt{3}$ （13） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（14） $g(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$；$\dfrac{5\pi}{6}$ （15）①③④

注意：填空题两空的前一个 3 分，后一个 2 分；多选题不全得 3 分或 4 分，错选得 0 分

9.【详解】设顶点 P 在底面上的投影为 O，连接 BO，则 O 为三角形 ABC 的中心，



且 $BO=\dfrac{2}{3}\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，故 $PO=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$.

因为 $PQ=5$，故 $OQ=1$，

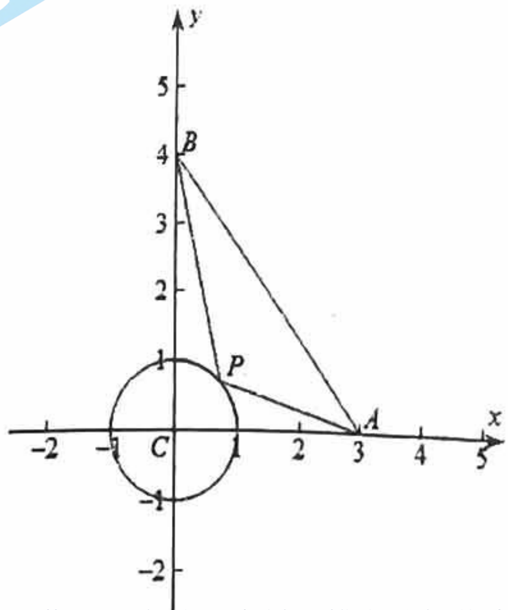
故 S 的轨迹为以 O 为圆心，1 为半径的圆，

而三角形 ABC 内切圆的圆心为 O，半径为

$$\frac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times36}{3\times6}=\sqrt{3}>1,$$

故 S 的轨迹圆在三角形 ABC 内部，故其面积为 π

10.【详解】解：依题意如图建立平面直角坐标系，则 $C(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,4)$，



因为 $PC=1$，所以 P 在以 C 为圆心，1 为半径的圆上运动，

设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta)\times(3-\cos\theta)+(4-\sin\theta)\times(-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta-3\cos\theta-4\sin\theta+\sin^2\theta=1-3\cos\theta-4\sin\theta$

$=1-5\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{3}{5}$， $\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

因为 $-1\le\sin(\theta+\varphi)\le1$，所以 $-4\le1-5\sin(\theta+\varphi)\le6$，即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,6]$；

三、解答题（共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16.（本小题满分 13 分）

解：选择条件①（I）$\because c=7,\cos A=-\frac{1}{7}$，$a+b=11$

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\therefore a^2=(11-a)^2+7^2-2(11-a)\cdot7\cdot(-\frac{1}{7})$ …………4 分

$\therefore a=8$ …………………… .6 分

（II）$\because\cos A=-\frac{1}{7}$，$A\in(0,\pi)\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ………………9 分

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\therefore\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7}{\sin C}\therefore\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………11 分

$$S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-8)\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$ ………………13 分

选择条件②（I）$\because\cos A=\frac{1}{8},\cos B=\frac{9}{16}$，$A,B\in(0,\pi)$ ………………………1 分

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{3\sqrt{7}}{8},\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ …… ….5 分

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\therefore\frac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}\therefore a=6$ ………………7 分

（II）$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ …10 分

$$S=\frac{1}{2}ba\sin C=\frac{1}{2}(11-6)\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$ ………………13 分

17.（本小题满分 14 分）

解：（I）由频率分布直方图可得： $(0.01+0.02+0.03+0.04+0.05+0.05+0.05+a+0.15)\times2=1$，解得 $a=0.1$. ……………………3 分

（II）由频率分布直方图可知，这 500 名学生中日平均阅读时间在$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$三组内的学生人数分别为$500\times0.10=50$人，$500\times0.08=40$人，$500\times0.02=10$人.

若采用分层抽样的方法抽取了 10 人，则从日平均阅读时间在$(14,16]$内的学生中抽取了

$\dfrac{40}{50+40+10}\times10=4$人. ……………………5 分

现从这 10 人中随机抽取 3 人，则 X 的可能取值为$0,1,2,3$. ……………………6 分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$……………………10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

……… .11 分

（III）$k=4$. …………14 分

18.（本小题满分 15 分）

证明：（I） 在正方形中，因为 B 是 AM 的中点，所以 $AB\parallel DE$。…………1 分

又因为$AB\not\subset$平面 PDE，所以 $AB\parallel$平面 PDE， …………2 分

因为 $AB\subset$平面 ABF，且平面$ABF\cap$平面$PDF=FG$，

所以 $AB\parallel FG$。 …………4 分

（II）因为$PA\perp$底面 ABCDE,所以$PA\perp AB$，$PA\perp AE$

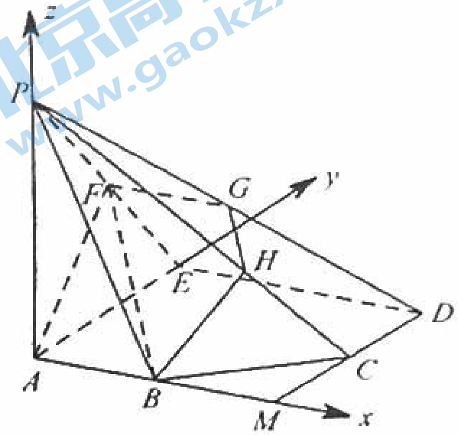
如图建立空间直角坐标系 $Axyz$,则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(2,1,0)$, $P(0,0,2)$, $F(0,1,1)$,

$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,1,-2)$. ………5 分

设平面 ABF 的法向量为$n=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} n\cdot \overrightarrow{AB}=0, \\ n\cdot \overrightarrow{AF}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=0, \\ y+z=0. \end{cases}$

令 $z=1$,，则 $y=-1$。所以 $n=(0,-1,1)$，……7 分



设直线 BC 与平面 ABF 所成角为 a, 则

$\sin a=\left|\cos\langle n,\overrightarrow{BC}\rangle\right|=\left|\dfrac{n\cdot\overrightarrow{BC}}{|n||\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{1}{2}$ ………9 分

直线 BC 与平面 ABF 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$ ………10 分

因为点 H 在棱 PC 上，所以可设 $\overrightarrow{PH}=\lambda\overrightarrow{PC}(0<\lambda<1)$,

即 $\overrightarrow{PH}=\lambda(2,1,-2)=(2\lambda,\lambda,-2\lambda)$， ………11 分

因此 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PH}=(2\lambda,\lambda,2-2\lambda)$ ………12 分

因为 n 是平面 ABF 的法向量，所以 $n\cdot\overrightarrow{AH}=0$，即

$(0,-1,1)\cdot(2\lambda,\lambda,2-2\lambda)=0$ …………13 分

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$， ………14 分

所以 $|\overrightarrow{PH}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{PC}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{4+1+4}=2$ ………15 分

（19）（本小题 15 分）

解：（I）因为点 $A(0,-1)$ 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，

将点 $A(0,-1)$ 代入椭圆方程，可得 $\dfrac{0}{3}+\dfrac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2=1$． ……1 分

椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$．因为 $c^2=a^2-b^2=3-1=2$， ………2 分

所以椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． ………3 分

（II）由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$ 可得 $(3k^2+1)x^2-6k^2x+3(k^2-1)=0$． ………4 分

$\Delta = 36k^4 - 12(3k^2+1)(k^2-1) = 24k^2+12 > 0$ 恒成立，

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}$ ……….6 分

直线 AE 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$， ……….7 分

令 $x=3$，得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{3(y_1+1)}{x_1}-1$， ……….8 分

同理可得点 N 的纵坐标为 $y_N=\frac{3(y_2+1)}{x_2}-1$， ……….9 分

所以 $|MN|=|y_M-y_N|=3\left|\frac{y_1+1}{x_1}-\frac{y_2+1}{x_2}\right|=3\left|\frac{x_2(y_1+1)-x_1(y_2+1)}{x_1x_2}\right|$

$$=\frac{3|k-1||x_2-x_1|}{|x_1x_2|}$$ ……….11 分

$$=\frac{3|k-1|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{|x_1x_2|}=\frac{3|k-1|\sqrt{(\frac{6k^2}{3k^2+1})^2-4\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}}}{\left|\frac{3(k^2-1)}{3k^2+1}\right|}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2k^2+1}}{|k+1|}.$$ ……….13 分

因为 ΔAMN 的面积 $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}|MN|\times(3-0)=\frac{3}{2}|MN|=3\sqrt{3}$，

所以 $|MN|=2\sqrt{3}$，即 $\frac{\sqrt{2k^2+1}}{|k+1|}=1$， ……….14 分

化简得 $k^2-2k=0$，解得 $k=0$ 或 $k=2$ ……….15 分

所以 k 的值为 0 或 2.

20.（本小题共 15 分）

解：(I) 因为 $f(x)=x-a\ln x$，所以 $f'(x)=1-\frac{a}{x}$. ……….1 分

所以 $f'(1)=1-a$. 又因为 $f(1)=1$， ……….3 分

所以 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=(1-a)(x-1)$，即

$y=(1-a)x+a$. ……….4 分

(II) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ………5 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

………7 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,a)$，单调递增区间为 $(a,+\infty)$ ……….8 分

(III) 由 (II) 知：

①当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.所以 $f(x)=0$ 至多有一个实根，不符合题意.

……… 9 分

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)=a-a\ln a$.

若 $f(a)\ge 0$，则 $f(x)\ge 0$，所以 $f(x)=0$ 至多有一个实根，不符合题意.

若 $f(a)<0$，即 $a-a\ln a<0$，得 $a>\mathrm{e}$. ………10 分

又 $f(1)=1>0$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有唯一零点.

因为方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，且较小的实数根为 x_0，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上的唯一零点就是 x_0. ……….11 分

方法一：所以 $x_0-a\ln x_0=0$，$x_0\in(1,a)$.所以 $a=\frac{x_0}{\ln x_0}$. ……….12 分

所以“$(a-1)x_0>a$”等价于“$(\frac{x_0}{\ln x_0}-1)x_0>\frac{x_0}{\ln x_0}$”，即 $x_0-\ln x_0>1$

由（II）知，当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $f(1)=1$. ………14 分

又因为 $x_0\neq 1$，所以 $x_0-\ln x_0>1$.所以 $(a-1)x_0>a$. ………15 分

方法二：“$(a-1)x_0>a$”等价于“$x_0>\frac{a}{a-1}$”.又 $\frac{a}{a-1}-a=\frac{-a^2+2a}{a-1}=\frac{-a(a-2)}{a-1}<0$，

所以 $\frac{a}{a-1}<a$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，所以“$x_0>\frac{a}{a-1}$”等价于“$f(x_0)<f(\frac{a}{a-1})$”，

即 $f(\frac{a}{a-1})=\frac{a}{a-1}-a\ln\frac{a}{a-1}>0$.(*)

因为 $a>\mathrm{e}$，令 $t=\frac{a}{a-1}$，则 $t>1$，$a=\frac{t}{t-1}$.

即 (*) 等价于 $t-\frac{t}{t-1}\ln t>0$，即 $t-1-\ln t>0$.

所以“$(a-1)x_0>a$”等价于“$t-1-\ln t>0$”.

令 $g(t)=t-1-\ln t$，$t>1$.所以 $g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$.

当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(t)>g(1)$，而 $g(1)=0$.

所以 $t-1-\ln t>0$ 成立.所以 $(a-1)x_0>a$.

21.（本小题满分 13 分）

解：（1）5，1，0，2，2. ………………………………3 分

（2）因为 $0\le a_n\le n-1$，所以 $0\le a_2\le 1, 0\le a_3\le 2$， ………………………………4 分

又数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项互不相等，

当 $a_2=0$ 时，若 $a_3=1$，则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=1$，

且对$n\geq 3$，$\dfrac{m+0+(n-2)}{n}=\dfrac{m-2}{n}+1$都为整数，所以$m=2$；......................5 分

若$a_3=2$，

则$a_3=a_4=a_5=\cdots=2$，

且对$n\geq 3$，$\dfrac{m+0+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-4}{n}+2$都为整数，所以$m=4$；......................6 分

当$a_2=1$时，若$a_3=0$，

则$a_3=a_4=a_5=\cdots=0$，且对$n\geq 3$，$\dfrac{m+1+0\cdot(n-2)}{n}=\dfrac{m+1}{n}$都为整数，所以

$m=-1$，不符合题意；......................7 分

若$a_3=2$，则$a_3=a_4=a_5=\cdots=2$，

且对$n\geq 3$，$\dfrac{m+1+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-3}{n}+2$都为整数，所以$m=3$；......................8 分

综上，m的值为$2,3,4$.

（3）对于$n\geq 1$，令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

则$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}<\dfrac{S_{n+1}}{n}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n}\leq\dfrac{S_n+n}{n}=\dfrac{S_n}{n}+1$ ....9 分

又对每一个n，$\dfrac{S_n}{n}$都为正整数，所以$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}\leq\dfrac{S_n}{n}\leq\ldots\leq\dfrac{S_1}{1}=m$，其中“$<$”至多

出现$m-1$个.故存在正整数$M>m$，当$n>M$时，必有$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$成立......10 分

当$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$时，则$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}$.

从而$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}+S_n}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}}{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{n+2}$................12 分

由题设知$\dfrac{|a_{n+2}-a_{n+1}|}{n+2}\leq\dfrac{n+1}{n+2}<1$，又$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}$及$a_{n+1}$均为整数，

所以$\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=a_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$，故$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\cdots=$常数.

从而$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}=$常数. ....13 分

故存在正整数M，使得$n\geq M$时，a_n为常数.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂精益求精、专业严谨＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。