绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid 2<x<4\}$，则 $A\cup B=$

A．$\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　　B．$\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　　C．$\{x\mid 1\leqslant x<4\}$　　D．$\{x\mid 1<x<4\}$

2．$\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$

A．1　　B．-1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

3．6名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去1个场馆，甲场馆安排1名，乙场馆安排2名，丙场馆安排3名，则不同的安排方法共有

A．120种　　B．90种　　C．60种　　D．30种

4．日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球（球心记为 O），地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面．在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为

A．20°　　B．40°　　C．50°　　D．90°

5．某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是

A．62%　　B．56%　　C．46%　　D．42%

6．基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数．基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间．在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t（单位：天）的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$．有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$．据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加1倍需要的时间约为（$\ln 2\approx 0.69$）

A．1.2天　　B．1.8天　　C．2.5天　　D．3.5天

7．已知 P 是边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是

A．$(-2,6)$　　B．$(-6,2)$　　C．$(-2,4)$　　D．$(-4,6)$

8．若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是

A．$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B．$[-3,-1]\cup[0,1]$

C．$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D．$[-1,0]\cup[1,3]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．已知曲线 C：$mx^2+ny^2=1$．

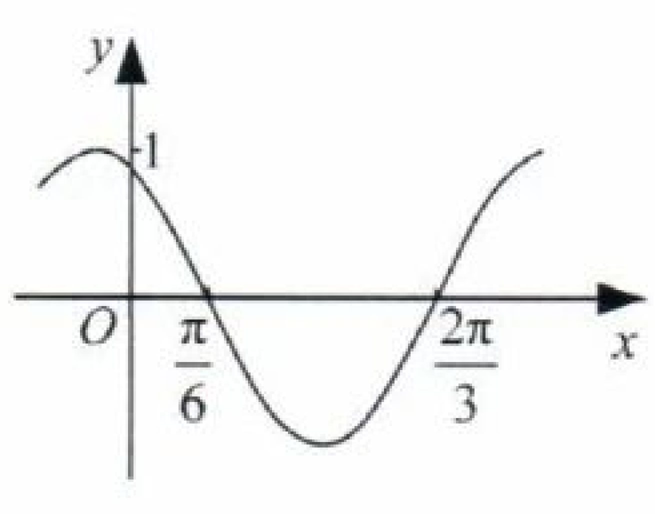
A．若 $m>n>0$，则 C 是椭圆，其焦点在 y 轴上

B．若 $m=n>0$，则 C 是圆，其半径为 $\sqrt{n}$

C．若 $mn<0$，则 C 是双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D．若 $m=0$，$n>0$，则 C 是两条直线

10．右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$



A．$\sin(x+\frac{\pi}{3})$

B．$\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

C．$\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

D．$\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

11．已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则

A．$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　　　B．$2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C．$\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　　　　D．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12．信息熵是信息论中的一个重要概念．设随机变量X所有可能的取值为$1, 2,\cdots, n$，且$P(X=i)=p_i>0(i=1, 2,\cdots, n)$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义$X$的信息熵$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$．

A．若$n=1$，则$H(X)=0$

B．若$n=2$，则$H(X)$随着p_1的增大而增大

C．若$p_i=\frac{1}{n}\ (i=1, 2,\cdots,n)$，则$H(X)$随着$n$的增大而增大

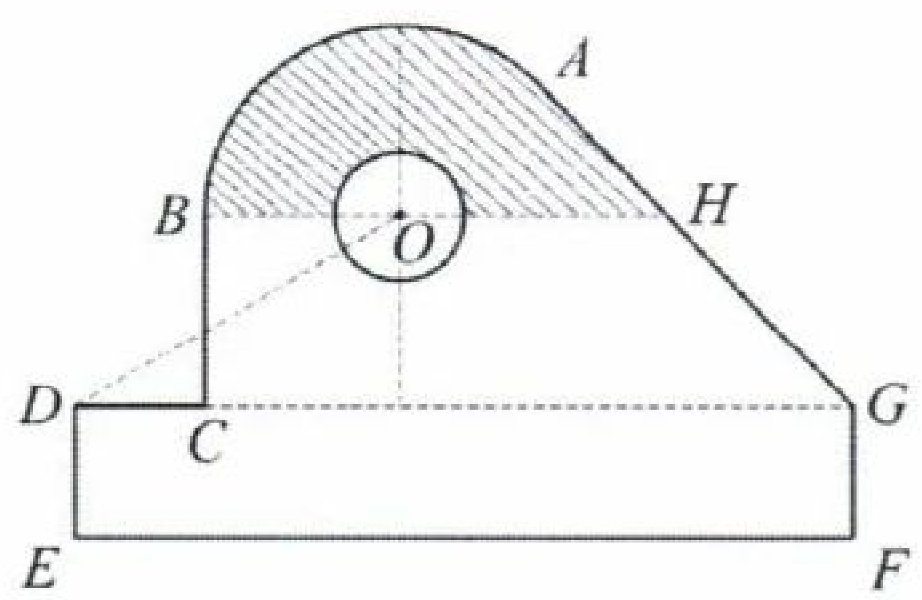
D．若$n=2m$，随机变量Y所有可能的取值为$1, 2,\cdots, m$，且$P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ $(j=1,2,\cdots,m)$，则$H(X)\leqslant H(Y)$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．斜率为$\sqrt{3}$的直线过抛物线$C:y^2=4x$的焦点，且与C交于A，B两点，则$|AB|=$__________．

14．将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前n项和为__________．

15．某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示．O为圆孔及轮廓圆弧AB所在圆的圆心，A是圆弧AB与直线AG的切点，B是圆弧AB与直线BC的切点，四边形$DEFG$为矩形，$BC\perp DG$，垂足为C，$\tan\angle ODC=\frac{3}{5}$，$BH//DG$，$EF=12$ cm，$DE=2$ cm，A到直线DE和EF的距离均为7 cm，圆孔半径为1 cm，则图中阴影部分的面积为__________cm^2．



16．已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为2，$\angle BAD=60°$．以D_1为球心，$\sqrt{5}$为半径的球面与侧面BCC_1B_1的交线长为__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在① $ac=\sqrt{3}$，② $c\sin A=3$，③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，__________？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

已知公比大于1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$，$a_3=8$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m]$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 中的项的个数，求数列 $\{b_m\}$ 的前100项和 S_{100}.

19.（12 分）

为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了100天空气中的PM2.5和 SO_2 浓度（单位：$\mu g/m^3$），得下表：

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

（1）估计事件“该市一天空气中PM2.5浓度不超过75，且 SO_2 浓度不超过150”的概率；

（2）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表：

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

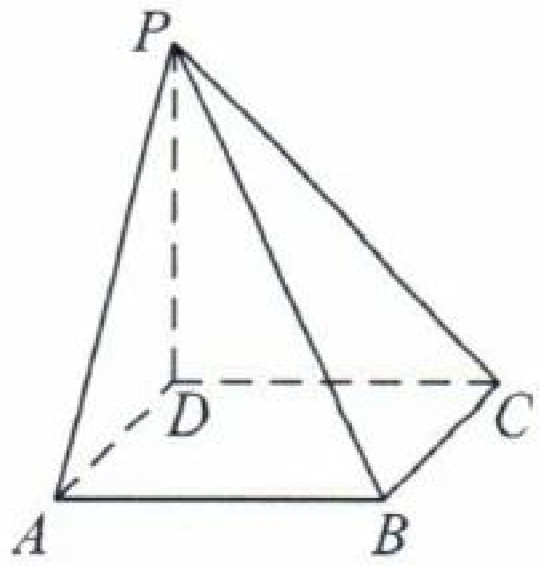
（3）根据（2）中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与 SO_2 浓度有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20．（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$．设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l．



（1）证明：$l\perp$ 平面 PDC；

（2）已知 $PD=AD=1$，Q 为 l 上的点，求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$．

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f(x)\geqslant 1$，求 a 的取值范围．

22．（12 分）

已知椭圆 $C\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$．

（1）求 C 的方程；

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．证明：存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值．

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题参考答案

一、选择题

1．C	2．D	3．C	4．B
5．C	6．B	7．A	8．D

二、选择题

9．ACD	10．BC	11．ABD	12．AC

三、填空题

13．$\dfrac{16}{3}$	14．$3n^2-2n$	15．$\dfrac{5\pi}{2}+4$	16．$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$

四、解答题

17．解：

方案一：选条件①．

由$C=\dfrac{\pi}{6}$和余弦定理得$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

由$\sin A=\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$a=\sqrt{3}b$．

于是$\dfrac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得$b=c$．

由①$ac=\sqrt{3}$，解得$a=\sqrt{3}$，$b=c=1$．

因此，选条件①时问题中的三角形存在，此时$c=1$．

方案二：选条件②．

由$C=\dfrac{\pi}{6}$和余弦定理得$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

由$\sin A=\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$a=\sqrt{3}b$．

于是$\dfrac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得$b=c$，$B=C=\dfrac{\pi}{6}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$．

由② $c\sin A=3$，所以 $c=b=2\sqrt{3}$， $a=6$.

因此，选条件②时问题中的三角形存在，此时 $c=2\sqrt{3}$.

方案三：选条件③.

由 $C=\dfrac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$ 及正弦定理得 $a=\sqrt{3}b$.

于是 $\dfrac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由此可得 $b=c$.

由③ $c=\sqrt{3}b$，与 $b=c$ 矛盾.

因此，选条件③时问题中的三角形不存在.

18．**解**：

（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q．由题设得 $a_1q+a_1q^3=20$， $a_1q^2=8$.

解得 $q=\dfrac{1}{2}$（舍去）， $q=2$．由题设得 $a_1=2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

（2）由题设及（1）知 $b_1=0$，且当 $2^n\leqslant m<2^{n+1}$ 时， $b_m=n$.

所以

$$
\begin{aligned}
S_{100}&=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)+\cdots+(b_{32}+b_{33}+\cdots+b_{63})+(b_{64}+b_{65}+\cdots+b_{100})\\
&=0+1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+5\times2^5+6\times(100-63)\\
&=480.
\end{aligned}
$$

19．**解**：

（1）根据抽查数据，该市100天的空气中PM2.5浓度不超过75，且 SO_2 浓度不超过150的天数为 $32+18+6+8=64$，因此，该市一天空气中PM2.5浓度不超过75，且 SO_2 浓度不超过150的概率的估计值为 $\dfrac{64}{100}=0.64$.

（2）根据抽查数据，可得 2×2 列联表：

SO_2 / PM2.5	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$	64	16
$(75,115]$	10	10

（3）根据（2）的列联表得

$$K^2=\frac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}\approx7.484 .$$

由于$7.484>6.635$，故有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO_2浓度有关.

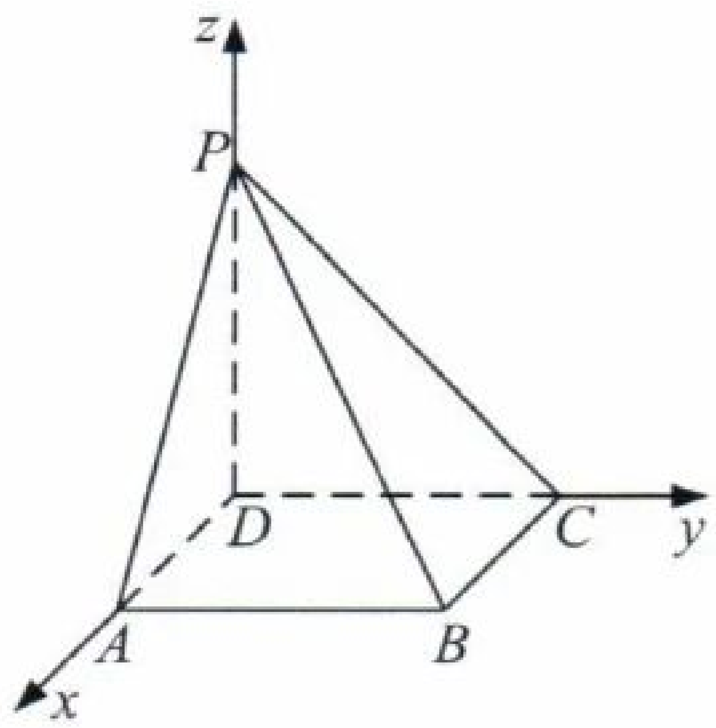
20．解：

（1）因为$PD\perp$底面$ABCD$，所以$PD\perp AD$．又底面$ABCD$为正方形，所以$AD\perp DC$．因此$AD\perp$平面PDC．

因为$AD//BC$，$AD\not\subset$平面PBC，所以$AD//$平面PBC．由已知得$l//AD$．

因此$l\perp$平面PDC．

（2）以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$．则$D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$P(0,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$．



由（1）可设$Q(a,0,1)$，则$\overrightarrow{DQ}=(a,0,1)$．

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面QCD的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}ax+z=0,\\ y=0.\end{cases}$$

可取$\boldsymbol{n}=(-1,0,a)$．

所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{-1-a}{\sqrt{3}\sqrt{1+a^2}}$．

设PB与平面QCD所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}$．

因为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，当且仅当$a=1$时等号成立，所以$PB$与平面$QCD$所成角的正弦值的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

21．解：

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x+1$，$f'(1)=\mathrm{e}-1$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(\mathrm{e}+1)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，即 $y=(\mathrm{e}-1)x+2$.

直线 $y=(\mathrm{e}-1)x+2$ 在 x 轴，y 轴上的截距分别为 $\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}$，2.

因此所求三角形的面积为 $\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$.

（2）当 $0<a<1$ 时，$f(1)=a+\ln a<1$.

当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\ln x$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x}$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(1)=1$，从而 $f(x)\geqslant 1$.

当 $a>1$ 时，$f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant \mathrm{e}^{x-1}-\ln x\geqslant 1$.

综上，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

22．解：

（1）由题设得 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a^2=6$，$b^2=3$.

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

若直线 MN 与 x 轴不垂直，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，代入 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得

$$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0.$$

于是

$$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},\quad x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}. \qquad ①$$

由 $AM\perp AN$ 知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，故 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，可得

$$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0.$$

将①代入上式可得$(k^2+1)\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}-(km-k-2)\dfrac{4km}{1+2k^2}+(m-1)^2+4=0$.

整理得$(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$.

因为$A(2,1)$不在直线MN上，所以$2k+m-1\neq 0$，故$2k+3m+1=0$，$k\neq 1$.

于是MN的方程为$y=k(x-\dfrac{2}{3})-\dfrac{1}{3}$ $(k\neq 1)$.

所以直线MN过点$P(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$.

若直线MN与x轴垂直，可得$N(x_1,-y_1)$.

由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$得$(x_1-2)(x_1-2)+(y_1-1)(-y_1-1)=0$.

又$\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，可得$3x_1^2-8x_1+4=0$. 解得$x_1=2$（舍去），$x_1=\dfrac{2}{3}$.

此时直线MN过点$P(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$.

令Q为AP的中点，即$Q(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$.

若D与P不重合，则由题设知AP是Rt$\triangle ADP$的斜边，故$|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

若D与P重合，则$|DQ|=\dfrac{1}{2}|AP|$.

综上，存在点$Q(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，使得$|DQ|$为定值.