2018 北京市房山区高三（上）期末

数　　学（理）

2018.1

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $M=\{-1,0,1,2\}$，$N=\{x|-1\le x<2\}$，则集合 $M\cap N$ 等于

（A）$\{-1,0,1\}$　　（B）$\{-1,0,2\}$　　（C）$\{-1,1,2\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）在复平面内，复数 $\dfrac{3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 在复平面中对应的点在

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le x \\ 2x-y-4\le 0 \end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为

（A）6　　（B）7　　（C）8　　（D）9

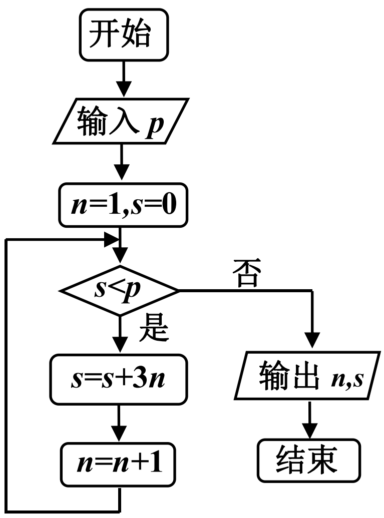
（4）某程序的框图如图所示，执行该程序，若输入的 p 为12，则输出的 n,s 的值分别为

（A）$n=3,s=18$

（B）$n=4,s=9$

（C）$n=3,s=9$

（D）$n=4,s=18$



（5）“$a,b\in\mathbf{R}^{+}$”是“$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$”成立的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

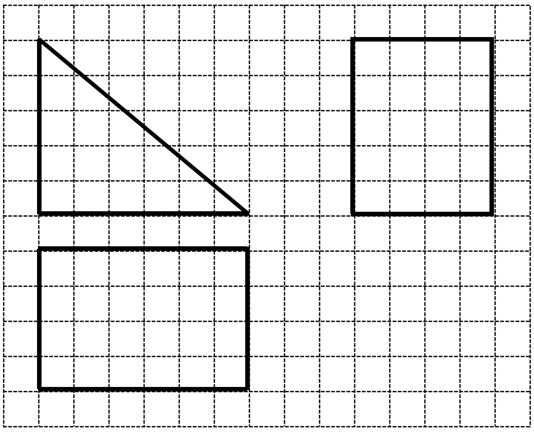
（6）下列函数是奇函数且在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$f(x)=-x^{3}$　　（B）$f(x)=\sqrt{x}$

（C）$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　（D）$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

（7）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是一个几何体的三视图，则这个几何体的体积是

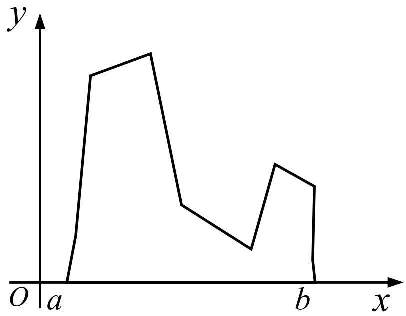
（A）120　　（B）60　　（C）24　　（D）20



（8）函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\ge 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值的集合为

（A）$\{2,3\}$　　（B）$\{3,4\}$

（C）$\{2,3,4\}$　　（D）$\{3,4,5\}$



第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知平面向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,y)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $y=$______.

（10）在△ABC 中，三个内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c．若 $b=4,\angle B=\frac{\pi}{6},\sin A=\frac{1}{3}$，则 $a=$______.

（11）中国古代钱币（如图1）承继了礼器玉琮的观念，它全方位承载和涵盖了中华文明历史进程中的文化信息，表现为圆形方孔．如图2，圆形钱币的半径为 $2cm$，正方形边长为 $1cm$，在圆形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是

图 1

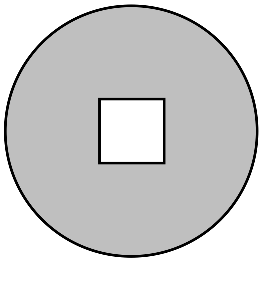


图 2

（12）等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差不为 0，且 a_2,a_3,a_6 成等比数列，则 $S_6=$______.

（13）能够说明“若甲班人数为 m，平均分为 a；乙班人数为 $n(n\ne m)$，平均分为 b，则甲乙两班的数学平均分

为 $\dfrac{a+b}{2}$”是假命题的一组正整数 a，b 的值依次为_____.

（14）将正整数12分解成两个正整数的乘积有 1×12，2×6，3×4 三种，其中 3×4 是这三种分解中两数差的绝对值最小的，我们称 3×4 为12的最佳分解. 当 $p\times q$（$p\le q$ 且 p，$q\in\mathbf{N}^*$）是正整数 n 的最佳分解时，我们定义函数 $f(n)=q-p$，例如 $f(12)=4-3=1$. 则 $f(81)=$______，数列 $\{f(3^n)\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）的前100项和为______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

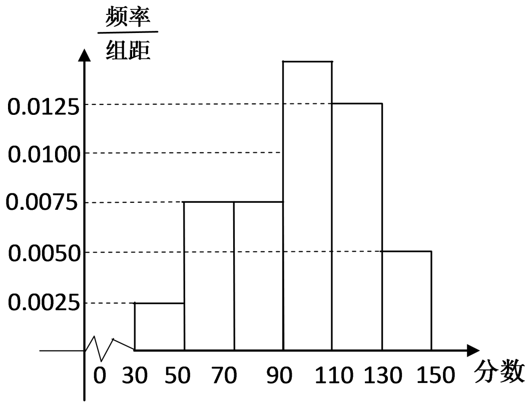
已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域.

（16）（本小题13分）

某市举行“中学生诗词大赛”，分初赛和复赛两个阶段进行，规定：初赛成绩大于90分的具有复赛资格，某校有800名学生参加了初赛，所有学生的成绩均在区间$(30,150]$内，其频率分布直方图如图.



（Ⅰ）求获得复赛资格的人数；

（Ⅱ）从初赛得分在区间$(110,150]$的参赛者中，利用分层抽样的方法随机抽取7人参加学校座谈交流，那么从得分在区间$(110,130]$与$(130,150]$各抽取多少人?

（Ⅲ）从（Ⅱ）抽取的7人中，选出3人参加全市座谈交流，设X表示得分在区间$(130,150]$中参加全市座谈交流的人数，求X的分布列及数学期望$E(X)$.

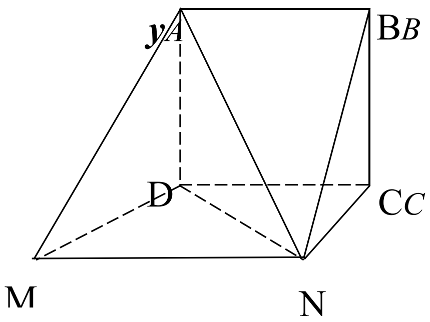
（17）（本小题14分）

如图几何体 ADM-BCN 中，$ABCD$是正方形，CD$//NM$，$AD\perp MD, CD\perp CN$，$\angle MDC=120^\circ$，$\angle CDN=30^\circ$，$MN=2MD=4$.

（Ⅰ）求证：$AB//$平面$CDMN$；

（Ⅱ）求证：$DN\perp$平面AMD；

（Ⅲ）求二面角$N-AM-D$的余弦值.



（18）（本小题14分）

已知直线l过点$P(0,1)$，圆$C: x^2+y^2-6x+8=0$，直线l与圆C交于A,B两点.

（Ⅰ） 求直线PC的方程;

（Ⅱ）求直线l的斜率k的取值范围;

（Ⅲ）是否存在过点Q（6,4）且垂直平分弦AB的直线l_1?若存在，求直线l_1斜率k_1的值，若不存在，请说明理由.

（19）（本小题13分）

已知函数 $f(x)=x\ln x+mx^2$.

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $m<0$ 时，设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值.

（20）（本小题13分）

对于各项均为整数的数列 $\{a_n\}$，如果满足 a_m+m（$m=1,2,3,\cdots$）为完全平方数，则称数列 $\{a_n\}$ 具有“ M 性质”；不论数列 $\{a_n\}$ 是否具有“ M 性质”，如果存在与 $\{a_n\}$ 不是同一数列的 $\{b_n\}$，且 $\{b_n\}$ 同时满足下面两个条件：①$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的一个排列；②数列 $\{b_n\}$ 具有“ M 性质”，则称数列 $\{a_n\}$ 具有“变换 M 性质”.

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n}{3}(n^2-1)$，证明数列 $\{a_n\}$ 具有“ M 性质”；

（Ⅱ）试判断数列 $1,2,3,4,5$ 和数列 $1,2,3,\cdots,11$ 是否具有“变换 M 性质”，具有此性质的数列请写出相应的数列 $\{b_n\}$，不具此性质的说明理由；

（Ⅲ）对于有限项数列 $A:1,2,3,\cdots,n$，某人已经验证当 $n\in[12,m^2]$（$m\geq 5$）时，数列 A 具有“变换 M 性质”，试证明：当 $n\in[m^2+1,(m+1)^2]$ 时，数列 A 也具有“变换 M 性质”.

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	（A）	（A）	（C）	（D）	（A）	（C）	（B）	（C）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）-4　（10）$\dfrac{8}{3}$　（11）$1-\dfrac{1}{4\pi}$　（12）-24　（13）a,b 是不相等的正整数即可

（14）0，$3^{50}-1$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15)解：（Ⅰ）$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sin x\cos x$

$=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$

$=\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 2x-\sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$

$=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$　　……………………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，

所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，因此 $0\le\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2}$

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.　　……………………13 分

（16）解：（1）由题意知 $[90,110)$ 之间的频率为:

$$1-20\times(0.0025+0.005+0.0075\times 2+0.0125)=0.3,$$

$$0.3+(0.0125+0.0050)\times 20=0.65,$$

∴获得参赛资格的人数为 $800\times 0.65=520$　　………………5 分

（Ⅱ）结果是 5，2.

（Ⅲ）X 的可能取值为 0，1，2，则

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3C_2^0}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$

$P(X=1)=\dfrac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\dfrac{4}{7}$

$P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\dfrac{1}{7}$

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

$E\left(X\right)=0\times\dfrac{2}{7}+1\times\dfrac{4}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. ……………13 分

（17）解：（Ⅰ）在正方形 $ABCD$ 中，$AB//CD$；

又 $\because CD\subset$ 面MNCD，$AB\not\subset$ 面MNCD；

$\therefore AB//$ 面MNCD …………………5 分

（Ⅱ）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore AD\perp DC$

$\because AD\perp MD$，$CD\cap MD=D$，CD，$MD\subset$ 平面$MNCD$

$\therefore AD\perp$ 平面$MNCD$

$\because DN\subset MNCD$

$\therefore AD\perp DN$

$\because \angle MDC=120^\circ$，$\angle CDN=30^\circ$

$\therefore \angle MDN=90^\circ$

$\therefore ND\perp MD$

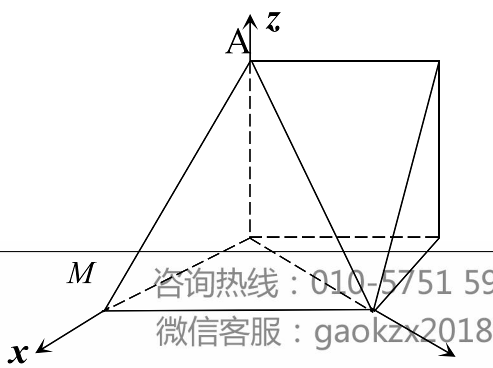
$\because AD\cap MD=D$，AD，$MD\subset$ 平面AMD

$\therefore DN\perp$ 面AMD

…………………10 分

（Ⅲ）法 1：以点 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系

$D-xyz$，如图所示；



由（II）$DN=2\sqrt{3},CD=3,CN=\sqrt{3}$；

$\therefore D(0,0,0),A(0,0,3),M(2,0,0),N(0,2\sqrt{3},0)$

$\therefore \overrightarrow{AM}=(2,0,-3),\overrightarrow{AN}=(0,2\sqrt{3},-3),\overrightarrow{DN}=(0,2\sqrt{3},0)$ 设面 AMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\therefore \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3z=0\\ 2\sqrt{3}y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}z\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\end{cases}$$

令 $z=2,则x=3,y=\sqrt{3}$，$\therefore \vec{n}=(3,\sqrt{3},2)$

$$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{DN}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DN}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DN}|}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

由图可知二面角 $N-AM-D$ 为锐角

$\therefore$ 二面角 $N-AM-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ……………………14 分

法 2：以点 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示；

由（II）$DN=2\sqrt{3},CD=3,CN=\sqrt{3}$；

$\therefore C(0,0,0),D(3,0,0),A(3,0,3),M(4,\sqrt{3},0),N(0,\sqrt{3},0)$

$\therefore \overrightarrow{AM}=(1,\sqrt{3},-3),\overrightarrow{AN}=(-3,\sqrt{3},-3),\overrightarrow{DN}=(-3,\sqrt{3},0)$ 设面 AMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\therefore \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{3}y-3z=0\\ -3x+\sqrt{3}y-3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{3}z\end{cases}$$

令 $z=1,则y=\sqrt{3}$，$\therefore \vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$

$$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{DN}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DN}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DN}|}=\frac{3}{2\sqrt{3}\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

由图可知二面角 $N-AM-D$ 为锐角

$\therefore$ 二面角 $N-AM-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………14 分

（18）（I）设圆 $C:(x-3)^2+y^2=1$，圆心为 $C(3,0)$，

故直线 PC 的方程为 $\dfrac{x}{3}+y=1$，即 $x+3y-3=0$ ……………………5 分

（II）法 1：直线 l 的方程为 $y=kx+1$，则

由$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+y^2-6x+8=0 \end{cases}$得$(k+1)x^2+(2x-6)x+9=0$

由$\Delta=(2k-6)^2-36(k^2+1)>0$得$-24k-36k^2>0$

故$-\frac{3}{4}<k<0$ ……………………10 分

法 2：直线l的方程为$y=kx+1$，即$kx-y+1=0$，

圆心为$C(3,0)$，圆的半径为 1 则圆心到直线的距离$d=\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$

因为直线与有交于A,B两点，故$\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，故$-\frac{3}{4}<k<0$

（III）假设存在直线l_1垂直平分于弦AB，此时直线l_1过Q（6,4），$C(3,0)$，则

$k_1=\frac{4-0}{6-3}=\frac{4}{3}$，故$AB$的斜率$k=-\frac{3}{4}$，由（II）可知，不满足条件

所以，不存在存在直线l_1垂直于弦AB。 ……………………14 分

（19）解：(I) 当$m=1$时，$f(x)=x\ln x+x^2$

所以$f'(x)=\ln x+2x+1$.

所以$f(1)=1$，切点为$(1,1)$.

$f'(1)=3$

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=3(x-1)$即$y=3x-2$

……………………6 分

（II）因为$g'(x)=\frac{1}{x}+m=\frac{1+mx}{x}$，$x\in[1,2]$，令$\frac{1+mx}{x}=0$，则$x=-\frac{1}{m}$

当$m\le-1$时，$0<-\frac{1}{m}\le1$，$g'(x)\le0$，$g(x)$为减函数

所以$g(x)$的最大值为$g(1)=m$

当$-1<m<-\frac{1}{2}$时，$1<-\frac{1}{m}<2$时

x	$\left(1,-\frac{1}{m}\right)$	$-\frac{1}{m}$	$(-\frac{1}{m},2)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大	↘

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(-\frac{1}{m})=-1-\ln(-m)$

当 $-\frac{1}{2}\le m<0$ 时，$-\frac{1}{m}\ge 2$ 时，$g'(x)\ge 0$ 恒成立，$g(x)$ 为增函数

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(2)=2m+\ln 2$

………………13分

（20）解：（Ⅰ）当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{n}{3}(n^2-1)-\frac{n-1}{3}[(n-1)^2-1]=n^2-n,$$

又 $a_1=0$，所以 $a_n=n^2-n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_i+i=i^2$（$i=1,2,3,\cdots$）是完全平方数，数列 $\{a_n\}$ 具有“M 性质”. ………4 分

（Ⅱ）数列 $1,2,3,4,5$ 具有“变换 M 性质”，

数列 $\{b_n\}$ 为 $3,2,1,5,4$.

数列 $1,2,3,\cdots,11$ 不具有“变换 M 性质”.

因为 11，4 都只有与 5 的和才能构成完全平方数，

所以数列 $1,2,3,\cdots,11$ 不具有“变换 M 性质”. …………8 分

（Ⅲ）设 $n=m^2+j$，$1\le j\le 2m+1$，

注意到 $(m+2)^2-(m^2+j)=4m+4-j$，

令 $h=4m+4-j-1$，

由于 $1\le j\le 2m+1$，$m\ge 5$，所以 $h=4m+4-j-1\ge 2m+2\ge 12$，

又 $m^2-h=m^2-4m-4+j+1\ge m^2-4m-2$，

$m^2-4m-2=(m-2)^2-6>0$，

所以 $h<m^2$，

即 $h\in[12,m^2]$.

因为当 $n\in[12,m^2]$（$m\ge 5$）时，数列 $\{a_n\}$ 具有“变换 M 性质”，

所以 $1,2,\cdots,4m+4-j-1$ 可以排列成 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_h$，使得 $a_i+i\,(i=1,2,\cdots,h)$ 都是平方数；

另外，$4m+4-j$，$4m+4-j+1$，…，m^2+j 可以按相反顺序排列，即排列为 m^2+j，…，$4m+4-j+1$，$4m+4-j$，

使得 $(4m+4-j)+(m^2+j)=(m+2)^2$，

$(4m+4-j+1)+(m^2+j-1)=(m+2)^2$，…，

所以 $1,2,\cdots,4m+4-j-1,4m+4-j,\cdots,m^2-1+j,m^2+j$ 可以排成 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_h$，$m^2+j,\cdots,4m+4-j$ 满足 $a_i+i\,(i=1,2,\cdots,m^2+j)$ 都是平方数. …………13

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao