2022 北京东城高三二模

数　　学

2022．5

本试卷共 6 页，150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）已知集合 $U=\boldsymbol{R}, A=\{x|x2-2x-3<0\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$\{x|-1<x<3\}$　　（B）$\{x|-1\le x\le 3\}$

（C）$\{x|x-1\text{或}x\ge 3\}$　　（D）$\{x|x<-1\text{或}x>3\}$

（2）已知 $a=\log_{\frac{1}{2}}3, b=\ln\pi, c=e^{-\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系为

（A）$b>c>a$　　（B）$b>a>c$

（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

（3）在 $(1-2x)^5$ 的展开式中，第 4 项的系数为

（A）-80　　（B）80　　（C）-10　　（D）10

（4）将函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后，所得图象对应的函数为

（A）$y=\sin 2x$　　（B）$y=-\sin 2x$

（C）$y=\cos 2x$　　（D）$y=-\cos 2x$

（5）《周髀算经》中对圆周率 π 有“径一而周三”的记载．已知圆周率 π 小数点后 20 位数字分别为 14159 26535 89793 23846．若从这 20 个数字的前 10 个数字和后 10 个数字中各随机抽取一个数字，则这两个数字均为奇数的概率为

（A）$\dfrac{3}{5}$　　　　（B）$\dfrac{33}{95}$　　　　（C）$\dfrac{21}{100}$　　　　（D）$\dfrac{7}{20}$

（6）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$右支上一点．若$C$的一条渐近线方程为$3x+4y=0$，则$\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=$

（A）$-\dfrac{5}{3}$　　　　（B）$\dfrac{5}{3}$　　　　（C）$-\dfrac{5}{4}$　　　　（D）$\dfrac{5}{4}$

（7）已知$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则“$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$”是“$\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知点$P(\cos\theta,\sin\theta)$在直线$ax-y+3=0$上，则当θ变化时，实数a的范围为

（A）$[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　　　（B）$(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

（C）$[-3,3]$　　　　（D）$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

（9）已知等差数列$\{a_n\}$与等比数列$\{b_n\}$的首项均为-3，且$a_3=1,a_4=8b_4$，则数列$\{a_nb_n\}$

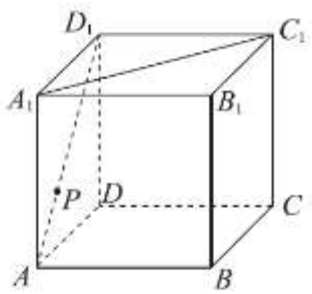
（A）有最大项，有最小项　　　　（B）有最大项，无最小项

（C）无最大项，有最小项　　　　（D）无最大项，无最小项

（10）如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则线段AD_1上的动点P到直线A_1C_1的距离的最小值为

（A）1　　　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

（11）已知复数z满足$(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$，则$z=$________；$|z|=$________．

（12）已知向量 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，且 $|a|=1, a\cdot b=0$，则 $a\cdot c=$________.

（13）已知抛物线 $C: y^2=2px\left(p>0\right)$，$P$ 为 C 上一点，$PQ\perp x$ 轴，垂足为 Q，F 为 C 的焦点，O 为原点．若 $\angle POQ=45°$，则 $\cos\angle PFQ=$________.

（14）已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $\dfrac{f'(x)}{x^2-1}>0$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为________．满足以上条件的一个函数是________.

（15）某公司通过统计分析发现，工人工作效率 E 与工作年限 $r\left(r>0\right)$，劳累程度 $T\left(0<T<1\right)$，劳动动机 $b\left(1<b<5\right)$ 相关，并建立了数学模型 $E=10-10T\cdot b^{-0.14r}$．已知甲、乙为该公司的员工，给出下列四个结论:

①甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作年限长，劳累程度弱，则甲比乙工作效率高;

②甲与乙劳累程度相同，且甲比乙工作年限长，劳动动机高，则甲比乙工作效率高;

③甲与乙工作年限相同，且甲比乙工作效率高，劳动动机低，则甲比乙劳累程度强;

④甲与乙劳动动机相同，且甲比乙工作效率高，工作年限短，则甲比乙劳累程度弱

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

（16）（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+b\cos A=\sqrt{2}c\cos C$.

（I）求 $\angle C$；

（II）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 c 和 $\sin A$ 的值.

条件①: $a=2\sqrt{2}$，AC 边上中线的长为 $\sqrt{5}$；

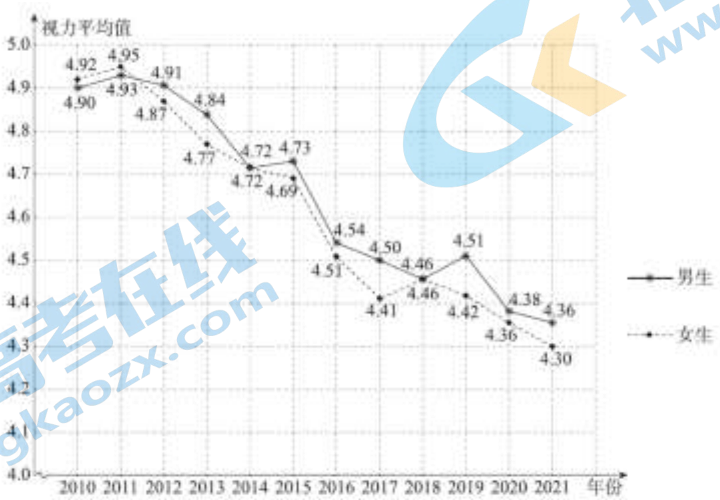
条件②: $b=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 6;

条件③: $\cos B=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$AC$ 边上的高 BD 的长为 2.

注:如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 13 分）

某部门为了解青少年视力发展状况，从全市体检数据中，随机抽取了 100 名男生和 100 名女生的视力数据，分别计算出男生和女生从小学一年级（2010 年）到高中三年级（2021 年）每年的视力平均值，如下图所示.



（I）从 2011 年到 2021 年中随机选取 1 年，求该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的概率；

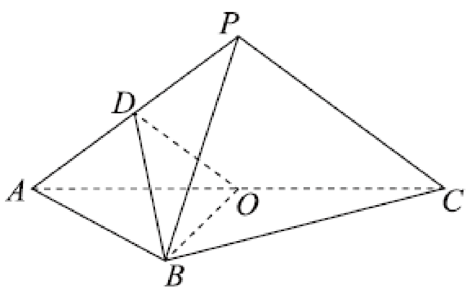
（II）从 2010 年到 2021 年这 12 年中随机选取 2 年，设其中恰有 X 年女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值，求 X 的分布列和数学期望；

（III）由图判断，这 200 名学生的视力平均值从哪年开始连续三年的方差最小？（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）如图，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC， $AB\perp BC$， $AB=BC, D, O$ 分别为 PA, AC 的中点，$AC=8, PA=PC=5$.

（I）设平面 $PBC\cap$ 平面 $BOD=l$，判断直线 l 与 PC 的位置关系，并证明；

（II）求直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值.



（19）（本小题 15 分）已知 $f(x)=x+\dfrac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（I）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（II）当 $x\in[e,+\infty)$ 时，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 x 轴的上方，求实数 a 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A\left(2,0\right)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 过点 $P(6,0)$ 与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别交直线 $x=6$ 于点 M,N .

（I）求椭圆 E 的方程；

（II）设 O 为原点，求证：$\angle PAN+\angle POM=90^\circ$.

（21）（本小题 15 分）

对于数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$，定义变换 T，T 将数列 A 变换成数列 $T(A):a_2,a_3,\cdots,a_n,a_1$，

记 $T^1(A)=T(A),T^m(A)=T\left(T^{m-1}(A)\right),m\geqslant 2$.

对于数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $B:b_1,b_2,\cdots,b_n$，定义 $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

若数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$，则称数列 A 为 $\Re_n$ 数列.

（I）若 $A:-1,-1,1,-1,1,1$，写出 $T\left(A\right)$，并求 $A\cdot T^2\left(A\right)$；

（II）对于任意给定的正整数 $n(n\geq 3)$，是否存在 $\Re_n$ 数列 A，使得 $A\cdot T\left(A\right)=n-3$？若存在，写出一个数列 A，若不存在，说明理由；

（III）若 $\Re_n$ 数列 A 满足 $T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=n-4(k=1,2,\cdots,n-2)$，求数列 A 的个数.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）A　（3）A　（4）B　（5）D

（6）C　（7）B　（8）B　（9）A　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$1+2\mathrm{i}$　$\sqrt{5}$　（12）-1

（13）$\dfrac{3}{5}$　（14）$(-1,1)$　$f(x)=x^3-3x$（答案不唯一）

（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）在 ΔABC 中，因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sqrt{2}\sin C\cos C$.

所以 $\sin(A+B)=\sqrt{2}\sin C\cos C$，即 $\sin C=\sqrt{2}\sin C\cos C$.

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\angle C=\dfrac{\pi}{4}$. ………………6 分

（II）选择条件②：

在 ΔABC 中，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times a\times 6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6$，

解得 $a=2\sqrt{2}$.

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=8+36-2\times 2\sqrt{2}\times 6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20$.

解得 $c=2\sqrt{5}$.

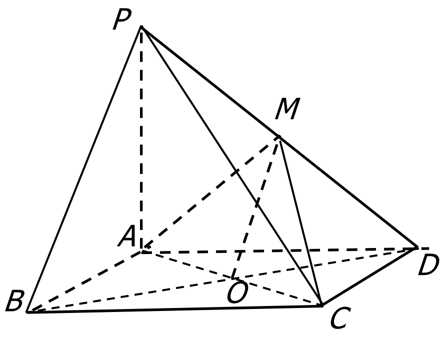
在 ΔABC 中，因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………13 分

选择条件③：

在 ΔABC 中，因为 $\cos B=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\dfrac{\pi}{2}<\angle B<\pi$，

所以 $\sin B=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.



在 ΔABC 中，

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

在 $\mathrm{Rt}\Delta ABD$ 中，可得 $c=2\sqrt{5}$． ………………13 分

（17）（共 13 分）

解：（I）由图可知，从 2011 年到 2021 年这 11 年中，2011 年、2015 年和 2019 年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值.

因此，从 2011 年到 2021 年中随机选取 1 年，该年男生的视力平均值高于上一年男生的视力平均值的概率为 $\dfrac{3}{11}$． ………………3 分

（II）在这 12 年中，2010 年、2011 年、2014 年、2018 年女生的视力平均值不低于当年男生的视力平均值.

X 的所有可能取值为 0，1，2.

$$P(X=0)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{14}{33},$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_8^1}{C_{12}^2}=\frac{16}{33},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{14}{33}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{1}{11}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{6}{11}+1\times\dfrac{9}{22}+2\times\dfrac{1}{22}=\dfrac{2}{3}$． ………………11 分

（III）这 200 名学生的视力平均值从 2017 年开始连续三年的方差最小. ………13 分

（18）（共 14 分）

解：（I）直线 $l\,//\,PC$，证明如下：

因为 D，O 分别为 PA，AC 中点，

所以 $DO\,//\,PC$．

又因为 $DO\subset$ 平面 BOD，$PC\not\subset$ 平面 BOD，

所以 $PC\,//$ 平面 BOD．

因为 $PC\subset$ 平面 PBC，平面 $PBC\bigcap$ 平面 $BOD=l$，

所以 $l \,//\, PC$． ………………5 分

（II）连结 PO．

因为 $PA=PC$， O 为 AC 中点，

所以 $PO\perp AC$．

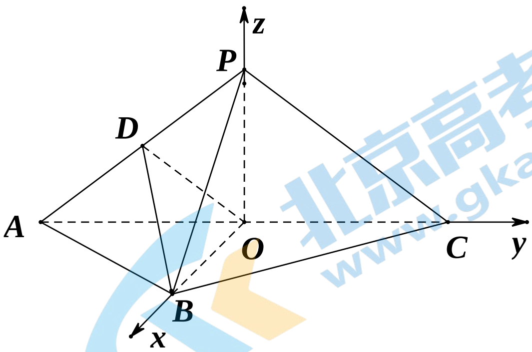
因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，

所以 $PO\perp$ 平面ABC．

所以 $PO\perp OB$．

因为 $AB=BC$，所以 $OB\perp AC$．

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $O(0,0,0)$， $A(0,-4,0)$， $B(4,0,0)$， $P(0,0,3)$．

因为点 D 为 PA 中点，所以 $D(0,-2,\dfrac{3}{2})$．

所以 $\overrightarrow{OD}=(0,-2,\dfrac{3}{2})$， $\overrightarrow{OB}=(4,0,0)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BOD 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x=0,\\ -2y+\dfrac{3}{2}z=0.\end{cases}$

令 $z=4$，则 $x=0$， $y=3$，可得 $\boldsymbol{n}=(0,3,4)$．

设直线 PB 与平面 BOD 所成角为 α，

因为 $\overrightarrow{PB}=(4,0,-3)$，

所以 $\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{PB},\ \boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{12}{25}$．

所以直线 PB 与平面 BOD 所成角的正弦值为 $\dfrac{12}{25}$． ………………14 分

（19）（共 15 分）

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

（I）当 $a=1$ 时， $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\ln x$， $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$．

所以 $f(1)=3$， $f'(1)=0$．

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=3$． …………5 分

（II）当 $a\ge 0$ 时，由 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 有 $f(x)>0$，故曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方.

当 $a<0$ 时， $f'(x)=1-\dfrac{2a^2}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x-a)(x+2a)}{x^2}$．

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-2a$ 或 $x=a$（舍去）.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f\left(x\right)$ 变化情况如下：

x	$\left(0,-2a\right)$	$-2a$	$(-2a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

当 $-2a\le \mathrm{e}$，即 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\le a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\mathrm{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $f(x)\ge f(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}a^2+a+\mathrm{e}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}(a+\dfrac{\mathrm{e}}{4})^2+\dfrac{7}{8}\mathrm{e}>0$，

即曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方.

当 $-2a>\mathrm{e}$，即 $a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\mathrm{e},-2a\right)$ 上单调递减，在区间 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)\ge f(-2a)=-3a+a\ln(-2a)$.

由 $x\in\left[\mathrm{e},+\infty\right)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，

有 $-3a+a\ln(-2a)>0$，解得 $a>-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2}$.

所以 $-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2}<a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\dfrac{\mathrm{e}^3}{2},+\infty)$. ……15 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由题设，知 $\begin{cases}a=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a^2=4,b^2=3$.

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………5 分

（II）由题设知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-6)(k\ne 0)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-6),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y，得 $(4k^2+3)x^2-48k^2x+144k^2-12=0$.

由 $\Delta=(-48k^2)^2-4(4k^2+3)(144k^2-12)>0$ 及 $k\ne 0$，

解得 k 的取值范围为 $(-\dfrac{\sqrt{6}}{8},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{6}}{8})$.

设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{48k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{144k^2-12}{4k^2+3}$.

直线 $AB: y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=6$，得 $y=\dfrac{4y_1}{x_1-2}$，

点 $M(6,\dfrac{4y_1}{x_1-2})$.

同理，点 $N(6,\dfrac{4y_2}{x_2-2})$.

由题设知，$\tan\angle PAN=\dfrac{|\frac{4y_1}{x_1-2}|}{4}$，$\tan\angle PMO=\dfrac{6}{|\frac{4y_2}{x_2-2}|}$.

因为 $\dfrac{4y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{4y_2}{x_2-2}=\dfrac{16k^2(x_1-6)(x_2-6)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$$=\frac{16k^2[x_1x_2-6(x_1+x_2)+36]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{16k^2\cdot(\frac{144k^2-12}{4k^2+3}-6\times\frac{48k^2}{4k^2+3}+36)}{\frac{144k^2-12}{4k^2+3}-2\times\frac{48k^2}{4k^2+3}+4}$$

$=24$，

所以 $\tan\angle PAN=\tan\angle PMO$，且 $\dfrac{4y_1}{x_1-2}$ 与 $\dfrac{4y_2}{x_2-2}$ 同号.

依题意，得 $\angle PAN=\angle PMO$，且点 M，N 位于 x 轴同侧.

因为 $\angle PMO+\angle POM=90^\circ$，

所以 $\angle PAN+\angle POM=90^\circ$. ………………15 分

（21）（共 15 分）

解：（I）由于 A: -1，-1，1，-1，1，1，

可得 $T(A)$: -1，1，-1，1，1，-1.

$T^2(A)$: 1，-1，1，1，-1，-1.

所以 $A\cdot T^2(A)=-2$. ……………4 分

（II）$A\cdot T(A)=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$.

因为列 A 为 $\Re_n$ 数列，所以 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.

对于数列 A: a_1，$a_2,\cdots$，a_n 中相邻的两项 a_i，a_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$，

令 $a_{n+1}=a_1$.

若 $a_i=a_{i+1}$，则 $a_ia_{i+1}=1$；若 $a_i\neq a_{i+1}$，则 $a_ia_{i+1}=-1$.

记 $a_ia_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 中有 t 个 -1，$n-t$ 个 1，则 $A\cdot T(A)=n-2t$.

因为 $n-2t$ 与 n 的奇偶性相同，而 $n-3$ 与 n 的奇偶性不同，

因此不存在符合题意的数列 A. ……………9 分

（III）首先证明 $A\cdot T(A)=T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)(k=1,2,\cdots,n-2)$.

对于数列 A: a_1, $a_2,\cdots$, a_n, 有 $T(A)$: $a_2,\cdots$, a_n, a_1.

$T^k(A)$: a_{k+1}, $a_{k+2},\cdots$, a_{n-1}, a_n, a_1, $a_2,\cdots$, a_{k-1}, a_k.

$T^{k+1}(A)$: a_{k+2}, $a_{k+3},\cdots$, a_{n-1}, a_n, a_1, $a_2,\cdots$, a_k, a_{k+1}.

因为 $A\cdot T(A)=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1$,

$T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)=a_{k+1}a_{k+2}+a_{k+2}a_{k+3}+\cdots+a_na_1+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_ka_{k+1}$,

所以 $A\cdot T(A)=T^k(A)\cdot T^{k+1}(A)$.

所以 $A\cdot T(A)=n-4$.

其次，由数列 A 为 $\Re_n$ 数列知 $A\cdot T(A)=n-2t=n-4$，解得 $t=2$.

这说明数列 A 中的任意相邻的两项不同的情况有 2 次,

也就是数列 A 中所有的 -1 相邻，所有的1也相邻.

若数列 A 中 -1 的个数为 $m(m=1,2,\cdots,n-1)$ 个，此时数列 A 有 n 个，

所以数列 A 的个数共有 $n(n-1)$ 个. ………………15 分

2022 北京高三各区二模试题下载