2020-2021 学年度人大附中高三年级数学学科热身练习

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则 $A\cap B=$（　）

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{(0,0)\}$　　（C）$\{(1,1)\}$　　（D）$\{(0,0),(1,1)\}$

（2）设 i 为虚数单位，若 $z=\dfrac{2i}{1+i}$，则 $\overline{z}=$（　）

（A）$1+i$　　（B）$-1+i$　　（C）$1-i$　　（D）$-1-i$

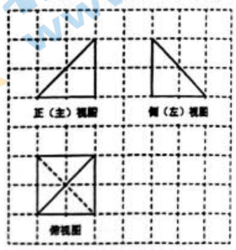
（3）将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位后，得到函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，则 φ 的值为（　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{\pi}{4}$

（4）在等边 ΔABC 中，$AB=1$，D 为 AB 边的中点，则 $\overline{AC}\cdot\overline{DA}$ 的值为（　）

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$-\dfrac{1}{4}$　　（D）$-\dfrac{3}{4}$

（5）某三棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，该三棱锥的体积为（　）



（A）$\dfrac{4}{3}$　　（B）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　（C）$\dfrac{8}{3}$　　（D）$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

（6）设 $\alpha\in\left\{-1,\dfrac{1}{2},1,2,3\right\}$，则“$f(x)=x^\alpha$ 的图象经过点 $(-1,-1)$”是“$f(x)=x^\alpha$ 为奇函数”的（　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(7) 已知圆 C 经过点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，且与直线 $y=x-1$ 只有一个公共点，则圆心 C 的坐标为（ ）

(A) $(0,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(0,-1)$　　(D) $(0,1)$ 或 $(0,-1)$

(8) 在 ΔABC 中，$a=\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的最大周长是（ ）

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $3\sqrt{3}$　　(C) $3+\sqrt{3}$　　(D) $4+\sqrt{3}$

(9) 聚光式太阳灶（如图 1）广泛应用于我国西部农村地区。其轴截面图（如图 2）中，点 F 为抛物线的焦点，此处放置烧水壶。按照一般制作工艺，抛物线的顶点 A 与焦点 F 关于其外沿所在的平面对称。已知 A、F 两点间的距离为 0.5 米，则该太阳灶的最大口径（外沿所在圆的直径）大约为（ ）

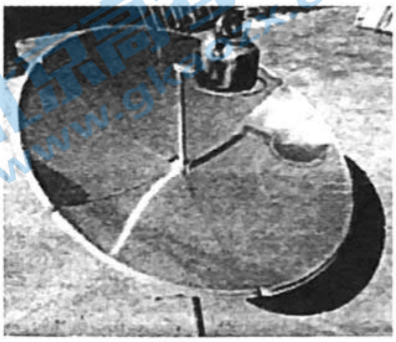


图 1

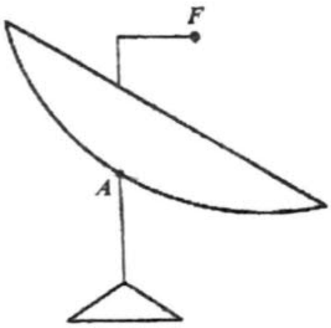


图 2

(A) 1.2 米　　(B) 1.4 米　　(C) 1.6 米　　(D) 1.8 米

(10) 黎曼函数 $R(x)$ 是由德国数学家黎曼发现并提出的，在高等数学中有着广泛的应用。

$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的定义为：当 $x=\dfrac{q}{p}$（$p>q$，且 p,q 为互质的正整数）时，$R(x)=\dfrac{1}{p}$；

当 $x=0$ 或 $x=1$ 或 x 为 $(0,1)$ 内的无理数时，$R(x)=0$。已知 $a,b,a+b\in[0,1]$，则（ ）

(A) $R(x)$ 的值域为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$　　(B) $R(a\cdot b)\geq R(a)\cdot R(b)$

(C) $R(a+b)\geq R(a)+R(b)$　　(D) 以上选项都不对

注：p,q 为互质的正整数 $(p>q)$，即 $\dfrac{q}{p}$ 为已约分的最简真分数。

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）为了解某班同学的 100m 成绩，体育老师抽取了 6 名男生和 5 名女生进行了测试，结果绘制成茎叶图如图所示。记这 6 名男生，5 名女生测试成绩的中位数分别为 a,b，则 a,b 的大小关系为__________.

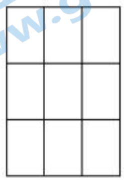
男生		女生
8	7	5
8　6　5	8	6　8
3　2	9	2　4

（12）若 $(x+a)^6$ 的展开式中 x^4 项的系数是 60，则 a 的值为________，常数项为__________.

（13）若对任意 $x\in R$，$\cos(x-\varphi)=\sin x$ 恒成立，则常数 φ 的一个取值为____________.

（14）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，两条渐近线分别为 l_1 和 l_2，若点 F 关于 l_1 的对称点恰好在 l_2 上，则双曲线 C 的离心率为____________.

（15）将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数填入如图所示 3×3 的正方形网格中，每个数填一次，每个小方格中填一个数。考虑每行从左到右，每列从上到下，两条对角线从上到下这 8 个数列，



给出下列四个结论：

①这 8 个数列有可能均为等差数列；

②这 8 个数列中最多有 3 个等比数列；

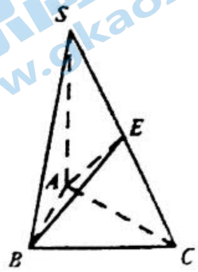
③若中间一行、中间一列、两条对角钱均为等差数列，则中心数必为 5；

④若第一行、第一列均为等比数列，则其余 6 个数列中至多有 1 个等差数列。

其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本题满分 14 分）如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧面 $SAB\perp$ 底面 ABC，$SA\perp AB$，$AB\perp BC$，$SA=AB=BC$.



（Ⅰ）求证：$SB\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SB 与 AC 所成角的大小；

（Ⅲ）若 E 为棱 SC 的中点，求二面角 $E-AB-C$ 的大小。

（17）（本题满分 13 分）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$S_5=15$。

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得数列 $\{b_n\}$ 唯一确定，求 b_n；

条件①：$T_n=2^{a_n}-1$；条件②：$T_n=2b_n-\dfrac{a_n}{n}$；条件③：$T_{n+1}=T_n+a_n$。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

（18）（本题满分 14 分）某工厂每天生产 1000 箱某型号口罩，每箱 300 个，该型号口罩吸气阻力不超过 343.2pa 的为合格品；否则为不合格品，不可出厂销售，生产过程中随机抽取了 20 个口罩进行检测，某吸气阻力值（单位：pa）如下表所示：

340.1	332.5	352.4	299.8	326.7	303.5	314.7	298.9	316.8	340.6
331.6	342.3	321.7	305.9	341.2	335.7	325.1	305.7	345.6	336.5

（Ⅰ）从样本中随机抽取 1 个口罩，求其为不合格品的概率；

（Ⅱ）从样本中随机抽取 3 个口罩，求其中含有不合格品的概率；

（Ⅲ）已知每个口罩的检测费用为 0.05 元，按有关规定，该型号口罩出厂前，工厂要对每一个口罩进行吸气阻力检测，为督促工厂执行此规定，每天生产的口罩出厂后，质检部门将随机抽取 100 箱，每箱抽取 3 个口罩进行检测，每检测出一个不合格品，罚款 500 元。这个处罚标准是否合理？说明理由.

（19）（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=e^x-2x^2$

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）是否存在 $x_1,x_2\in(0,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直？说明理由。（参考数据：$e\approx2.72$，$\ln2\approx0.69$）

（18）（本题满分 14 分）某工厂每天生产 1000 箱某型号口罩，每箱 300 个，该型号口罩吸气阻力不超过 343.2pa 的为合格品；否则为不合格品，不可出厂销售，生产过程中随机抽取了 20 个口罩进行检测，某吸气阻力值（单位：pa）如下表所示：

340.1	332.5	352.4	299.8	326.7	303.5	314.7	298.9	316.8	340.6
331.6	342.3	321.7	305.9	341.2	335.7	325.1	305.7	345.6	336.5

（Ⅰ）从样本中随机抽取 1 个口罩，求其为不合格品的概率；

（Ⅱ）从样本中随机抽取 3 个口罩，求其中含有不合格品的概率；

（Ⅲ）已知每个口罩的检测费用为 0.05 元，按有关规定，该型号口罩出厂前，工厂要对每一个口罩进行吸气阻力检测，为督促工厂执行此规定，每天生产的口罩出厂后，质检部门将随机抽取 100 箱，每箱抽取 3 个口罩进行检测，每检测出一个不合格品，罚款 500 元。这个处罚标准是否合理？说明理由.

（19）（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=e^x-2x^2$

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）是否存在 $x_1,x_2\in(0,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直？说明理由。（参考数据：$e\approx 2.72$，$\ln 2\approx 0.69$）

（20）（本题满分 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过如下四个点中的三个点：

$P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点（A，B 不是椭圆 C 的顶点）。点 D 在椭圆 C 上，且 $AD\perp AB$，直线 BD 与 x 轴交于点 E。过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，直线 BM 与直线 AE 相交于点 N，求证：ΔAMN 为等腰三角形。

（21）（本题满分 15 分）已知 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，

记 $A_i=\{x|x=a+t_i,a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数。

（Ⅰ）若 $n=5$，$A=\{1,2,5\}$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求 T；

（Ⅱ）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由；

（Ⅲ）若 $|A|=5$，对于任意的 A，都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$，求 n 的最小值。

2020-2021学年度人大附中高三年级数学学科热身练习

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则 $A\cap B=$（ ）

（A）$\{0,1\}$ （B）$\{(0,0)\}$ （C）$\{(1,1)\}$ （D）$\{(0,0),(1,1)\}$

解析：联立 $\begin{cases}y=x^2\\y=x\end{cases}$，**解得** $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ **或** $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，**选D.**

（2）设 i 为虚数单位，若 $z=\dfrac{2i}{1+i}$，则 $\overline{z}=$（ ）

（A）$1+i$ （B）$-1+i$ （C）$1-i$ （D）$-1-i$

解析： $z=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=1+i$，**则** $\overline{z}=1-i$，**选C.**

（3）将函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 个单位后，得到函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，则 φ 的值为（ ）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$ （B）$\dfrac{\pi}{6}$ （C）$\dfrac{\pi}{2}$ （D）$\dfrac{\pi}{4}$

解析： $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 2(x-\dfrac{\pi}{12})$，$y=\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}$，**选D.**

（4）在等边 ΔABC 中，$AB=1$，D 为 AB 边的中点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}$ 的值为（ ）

（A）$\dfrac{3}{4}$ （B）$\dfrac{1}{4}$ （C）$-\dfrac{1}{4}$ （D）$-\dfrac{3}{4}$

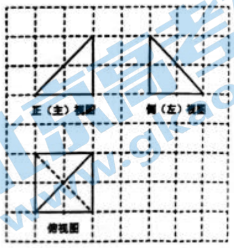
解析：法一：建系.以D为坐标原点建系， $D(0,0)$，$A(-\dfrac{1}{2},0)$，$C(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{AC}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{DA}=(-\dfrac{1}{2},0)$，**故** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

法二： $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cdot\cos120^\circ=1\times\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{4}$.

选C.

(5) 某三棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，该三棱锥的体积为（　）



（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　（C）$\frac{8}{3}$　　（D）$\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解析：画正方体，删点，再根据虚线可画出三棱锥， $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$**，选 A.**

(6) 设 $\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,2,3\right\}$，则"$f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $(-1,-1)$"是"$f(x)=x^{\alpha}$ 为奇函数"的（　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

解析： $f(-1)=(-1)^{\alpha}=-1$**，则** $\alpha=-1,1,3$**；若** $f(x)=x^{\alpha}$ **为奇函数，则** $\alpha=-1,1,3$**，选 C.**

(7) 已知圆 C 经过点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，且与直线 $y=x-1$ 只有一个公共点，则圆心 C 的坐标为（　）

（A）$(0,0)$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(0,-1)$　　（D）$(0,1)$ 或 $(0,-1)$

解析：直线也过点 $(1,0)$**，故直线** $y=x-1$ **为圆在点** $(1,0)$ **处的切线，设** $C(0,m)$**，**

则 $\frac{m-0}{0-1}=-1$**，即** $m=1$**，故圆心** $C(0,1)$**，选 B.**

(8) 在 ΔABC 中，$a=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则 ΔABC 的最大周长是（　）

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$3\sqrt{3}$　　（C）$3+\sqrt{3}$　　（D）$4+\sqrt{3}$

解析：

法一：边化角，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2$**，小强数学**

$a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin(B+A)=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$**，故最大子为** $3\sqrt{3}$**，选 B.**

法二：由余弦定理， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-3}{2bc}=\frac{1}{2}$**，** $(b+c)^2-3=3bc\le3\cdot(\frac{b+c}{2})^2$**，**

故 $(b+c)^2\le12$**，** $b+c\le2\sqrt{3}$**，故** $a+b+c\le3\sqrt{3}$**，选 B.**

（9）聚光式太阳灶（如图 1）广泛应用于我国西部农村地区。其轴截面图（如图 2）中，点 F 为抛物线的焦点，此处放置烧水壶。按照一般制作工艺，抛物线的顶点 A 与焦点 F 关于其外沿所在的平面对称。已知 A、F 两点间的距离为 0.5 米，则该太阳灶的最大口径（外沿所在圆的直径）大约为（　）

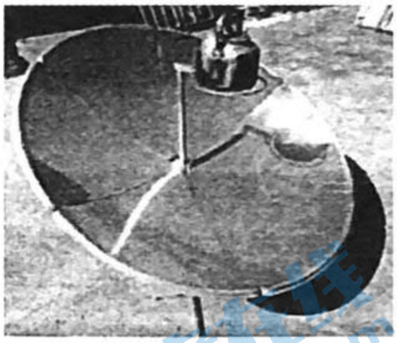


图 1

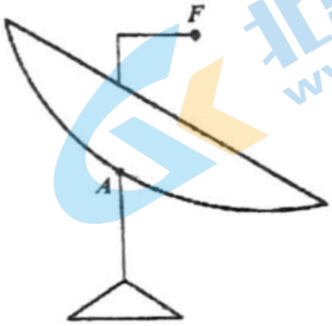


图 2

（A）1.2 米　　（B）1.4 米　　（C）1.6 米　　（D）1.8 米

解析：$AF=\frac{p}{2}=0.5$，$p=1$，若 $y^2=2x$，抛物线过 $(\frac{p}{4},\frac{\sqrt{2}p}{2})$，故最大口径为 $\sqrt{2}p=\sqrt{2}\approx 1.4$，选 B.

（10）黎曼函数 $R(x)$ 是由德国数学家黎曼发现并提出的，在高等数学中有着广泛的应用。

$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的定义为：当 $x=\frac{q}{p}$（$p>q$，且 p,q 为互质的正整数）时，$R(x)=\frac{1}{p}$；

当 $x=0$ 或 $x=1$ 或 x 为 $(0,1)$ 内的无理数时，$R(x)=0$。已知 $a,b,a+b\in[0,1]$，则（　）

（A）$R(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　　　（B）$R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)$

（C）$R(a+b)\ge R(a)+R(b)$　　　　（D）以上选项都不对

注：p,q 为互质的正整数 $(p>q)$，即 $\frac{q}{p}$ 为已约分的最简真分数。

解析：

对于 A，$R(x)$ 的值域为 $\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$，故 A 错误；

对于 C，找反例，令 $a=b=\frac{1}{2}$，则 $R(a+b)=R(1)=0$，$R(a)+R(b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，故 C 错误；

对于 B，令 $M=\left\{x\,|\,x=\frac{q}{p},p,q\text{为正整数，且}\frac{q}{p}\text{为最简真分数}\right\}$，$N=\{x\,|\,x=0\text{或}x=1\text{或}x\text{为}(0,1)\text{内的无理数}\}$，

不论 $\begin{cases}a\in M\\b\in M\end{cases}$，$\begin{cases}a\in M\\b\in N\end{cases}$，$\begin{cases}a\in N\\b\in M\end{cases}$，$\begin{cases}a\in N\\b\in N\end{cases}$ 均有 $R(a\cdot b)\ge R(a)\cdot R(b)$，可适当代数辅助判断，$B$ 对.

选 B.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）为了解某班同学的 100m 成绩，体育老师抽取了 6 名男生和 5 名女生进行了测试，结果绘制成茎叶图如图所示.记这 6 名男生，5 名女生测试成绩的中位数分别为 a,b，则 a,b 的大小关系为__________.

男生		女生
8	7	5
8 6 5	8	6 8
3 2	9	2 4

解析：$a=\dfrac{86+88}{2}=87$，$b=88$，故 $a<b$.

（12）若 $(x+a)^6$ 的展开式中 x^4 项的系数是 60，则 a 的值为________，常数项为__________.

解析：$C_6^2\cdot x^4\cdot a^2=15a^2x^4=60x^2$，即 $a^2=4$，故 $a=\pm 2$；

$C_6^6\cdot x^0\cdot a^6=64$，故常数项为 64.

（13）若对任意 $x\in R$，$\cos(x-\varphi)=\sin x$ 恒成立，则常数 φ 的一个取值为___________.

解析：将 $y=\cos x$ 向右平移 φ 个单位得到 $y=\sin x$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，可取 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

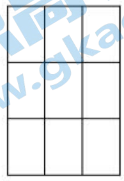
（14）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，两条渐近线分别为 l_1 和 l_2，若点 F 关于 l_1 的对称点恰好在 l_2 上，则双曲线 C 的离心率为____________.

解析：设 l_1 与 l_2 上的点分别为 A，B，左焦点为 F'.小强数学

点 F 关于 l_1 的对称点恰好在 l_2 上，可得 $\angle FOA=\angle BOA=\angle F'OB=60^\circ$，焦点 F 到渐近线的距离为 b，

即 $OA=a$，在 $Rt\Delta FAO$ 中，$\angle OFA=30^\circ$，故 $\sin 30^\circ=\dfrac{OA}{OF}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

（15）将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数填入如图所示3×3的正方形网格中，每个数填一次，每个小方格中填一个数。考虑每行从左到右，每列从上到下，两条对角线从上到下这 8 个数列，



给出下列四个结论：

①这 8 个数列有可能均为等差数列；

②这 8 个数列中最多有 3 个等比数列；

③若中间一行、中间一列、两条对角线均为等差数列，则中心数必为 5；

④若第一行、第一列均为等比数列，则其余 6 个数列中至多有 1 个等差数列。

其中所有正确结论的序号是____________.

解析：

对于①，

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

如图，此时 8 个数列均为等差数列，①正确；

对于②，

首先知道共有$(1,2,4)$，$(1,3,9)$，$(2,4,8)$，$(4,6,9)$四组数可构成等比数列，

但不能同时出现，最多可出现 3 组，

1	**2**	**4**
3	**6**	
9		

如图，此时 8 个数列中有 3 个等比数列，且最多有 3 个，②正确；

对于③，

中心数是每个数列的等差中项，比 5 小 4 个数，比 5 大 4 个数，且只能为 5，

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

如图，③正确；

对于④，

举个反例

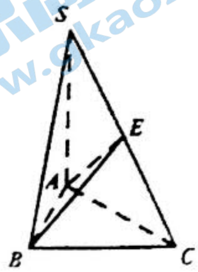
1	**2**	**4**
3	**5**	**7**
9	**8**	**6**

除了第一行第一列，258，357 两个都是等差数列，故④错误.

填①②③.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本题满分 14 分）如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧面 $SAB\perp$ 底面 ABC，$SA\perp AB$，$AB\perp BC$，$SA=AB=BC$．



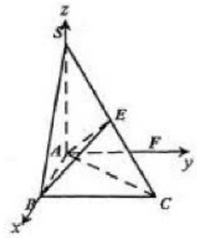
（Ⅰ）求证：$SB\perp BC$；

（Ⅱ）求直线 SB 与 AC 所成角的大小；

（Ⅲ）若 E 为棱 SC 的中点，求二面角 $E-AB-C$ 的大小。

解：（I）因为面 SAB⊥面 ABC，面 SAB∩面 ABC＝AB，BC⊂面 ABC，AB⊥BC，所以 BC⊥面 SAB.　……3 分

又因为 SB⊂面 SAB，所以 SB⊥BC.　……4 分



（II）如图，作 AF∥BC，则 AF⊥面 SAB，

又因为 AB，AS⊂面 SAB，所以 AF⊥AB，AF⊥AS.

又 AB⊥AS，如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$　……5 分

不妨设 SA＝AB＝BC＝1，则，B（1，0，0），C（1，1，0），S（0，0，1），

所以 $\overline{SB}=(1,0,-1)$，$\overline{AC}=(1,1,0)$．　……6 分

所以 $\cos\left\langle\overline{SB}\cdot\overline{AC}\right\rangle=\dfrac{\overline{SB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{SB}||\overline{AC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

设直线 SB 与 AC 所成角为 α，α 为锐角，

所以 $\cos\alpha=|\cos\left\langle\overline{SB}\cdot\overline{AC}\right\rangle|=\dfrac{1}{2}$，所以所求角 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$　……9 分

（III）因为 E 为棱 SC 的中点,所以 $E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overline{AE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

又 $\overline{AB}=(1,0,0)$，设平面 EMB 的法向量为 $m=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}m\cdot\overline{AB}=0,\\ m\cdot\overline{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=-1$。

于是 $m=(0,1,-1)$．　……11 分

又因为平面 ABC 的法向量为 $n=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m||n|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由题知，二面角 E-AB-C 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以二面角 E-AB-C 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.　　　　　　　……14 分

（17）（本题满分 13 分）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，$S_5=15$。

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得数列$\{b_n\}$唯一确定，求b_n；

条件①：$T_n=2^{a_n}-1$；条件②：$T_n=2b_n-\frac{a_n}{n}$；条件③：$T_{n+1}=T_n+a_n$。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，依题意$\begin{cases}a_1=1,\\5a_1+\frac{5(5-1)}{2}d=15.\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n\left(n\in N^*\right)$. ……6 分

（III）选择条件①.

因为$T_n=2^{a_n}-1=2^n-1$，

所以$b_n=T_n-T_{n-1}=\left(2^n-1\right)-\left(2^{n-1}-1\right)=2^{n-1}\left(n=2,3,\cdots\right)$.……10 分

又因为$b_1=T_1=2^1-1=1$满足上式，所以$b_n=2^{n-1}\left(n\in N^*\right)$. ……13 分

选择条件②

因为$T_n=2b_n-\frac{a_n}{n}=2b_n-1$，

所以$b_n=T_n-T_{n-1}=\left(2b_n-1\right)-\left(2b_{n-1}-1\right)=2b_n-2b_{n-1}$，$b_n=2b_{n-1}\left(n=2,3,\cdots\right)$.……10 分

又因为$b_1=T_1=2b_1-1$，$b_1=1$，

所以$\{b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

所以$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}\left(n\in N^*\right)$ …… 13 分

注：选择条件③，数列$\{b_n\}$不能唯一确定，不得分.

（18）（本题满分 14 分）某工厂每天生产 1000 箱某型号口罩，每箱 300 个，该型号口罩吸气阻力不超过 343.2pa 的为合格品；否则为不合格品，不可出厂销售，生产过程中随机抽取了 20 个口罩进行检测，某吸气阻力值（单位：pa）如下表所示：

340.1	332.5	352.4	299.8	326.7	303.5	314.7	298.9	316.8	340.6
331.6	342.3	321.7	305.9	341.2	335.7	325.1	305.7	345.6	336.5

（Ⅰ）从样本中随机抽取 1 个口罩，求其为不合格品的概率；

（Ⅱ）从样本中随机抽取 3 个口罩，求其中含有不合格品的概率；

（Ⅲ）已知每个口罩的检测费用为 0.05 元，按有关规定，该型号口罩出厂前，工厂要对每一个口罩进行吸气阻力检测，为督促工厂执行此规定，每天生产的口罩出厂后，质检部门将随机抽取 100 箱，每箱抽取 3 个口罩进行检测，每检测出一个不合格品，罚款 500 元。这个处罚标准是否合理？说明理由.

解：（Ⅰ）设“从样本中随机抽取 1 个口罩，其为不合格品”为事件 A.
由表知，20 个口罩中，吸气阻力值超过 343.2Pa 的，即不合格品恰有 2 个，

所以 $P(A)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$**，所求概率为** $\frac{1}{10}$. ……4 分

（Ⅱ）设“从样本中随机抽取 3 个口罩，其中含有不合格品”为事件 B.
由（1），20 个样本中不合格品恰有 2 个，合格品恰有 20－2＝18 个，

所以 $P(B)=\frac{C_{18}^{2}C_{2}^{1}}{C_{20}^{3}}+\frac{C_{18}^{1}C\frac{2}{2}}{C_{20}^{3}}=\frac{\frac{18\times17}{2\times1}\times2}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}}+\frac{18}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}}=\frac{51}{190}+\frac{3}{190}=\frac{27}{95}$

（**或** $P(B)=1-\frac{C_{18}^{3}C_{2}^{0}}{C_{20}^{3}}=1-\frac{\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}}=1-\frac{68}{95}=\frac{27}{95}$）

所求概率为 $\frac{27}{95}$ ……9 分

（Ⅲ）这个处罚标准不合理
依题意，若工厂执行此规定，则每天需检测费 0.05×300×1000＝15000 元.
由（Ⅰ），用频率估计每个口罩是不合格品的概率为 $\frac{1}{10}$
若工厂不进行检测，设质检部门抽检一个口罩，罚款 X 元.
依题意，X＝0，500.

$P(X=0)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$，$P(X=500)=\frac{1}{10}$

X	**0**	**500**
P	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

所以 $EX=0\times\frac{9}{10}+500\times\frac{1}{10}=50$.

所以若工厂不进行检测，每天需交罚款的期望为 $50\times100\times3=15000$ 元.
若工厂执行此规定，除了检测费外，还需要将不合格品更换为合格品；
故这个处罚标准偏低，达不到督促工厂执行此规定的目的.……14 分

另，由于样本量较少，该工厂生产口罩的实际不合格率可能有与 $\frac{1}{10}$ 有偏差该处罚标准未考虑工厂生产口罩的实际不合格率比 $\frac{1}{10}$ 小的可能，也没有考虑工厂有改良工艺，降低不合格率的可能，考虑这些因素，为督促工厂执行此规定，还需加大处罚力度.

(19)（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=e^x-2x^2$

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）是否存在 $x_1,x_2\in(0,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直？说明理由。（参考数据：$e\approx 2.72$，$\ln 2\approx 0.69$）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^x-2x^2$，$x\in R$.所以 $f(0)=1$，$f'(x)=e^x-4x$.所以 $f'(0)=1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x-1$ ……4 分

（II）存在.

设 $g(x)=f'(x)=e^x-4x$，$x\in R$，

所以 $g'(x)=e^x-4$. ……5 分

令 $g'(x)=0$ 得 $x=\ln 4\in(0,2)$

$g'(x)$，$g(x)$ 的情况如下：

x	$(0,\ln 4)$	$\ln 4$	$(\ln 4,2)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↓	极小	↑

所以 $g(x)$ 在 $(0,\ln 4)$ 递减，在 $(\ln 4,2)$ 递增. ……9 分

又因为 $g(0)=1$，$g(4)=4-4\ln 4$，$g(2)=e^2-8<1$.

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$g(x)=f'(x)$ 的取值范围是 $[4-4\ln 4,1)$ ……12 分

又因为 $\ln 2\approx 0.69$，所以 $4-4\ln 4=4-8\ln 2<-1$，

所以存在 $x_1,x_2\in(0,2)$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

即存在 $x_1,x_2\in(0,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线互相垂直. ……14 分

（20）（本题满分 15 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过如下四个点中的三个点：

$P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点（A，B 不是椭圆 C 的顶点）。点 D 在椭圆 C 上，且 $AD\perp AB$，直线 BD 与 x 轴交于点 E。过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，直线 BM 与直线 AE 相交于点 N，求证：ΔAMN 为等腰三角形。

此题可以先证 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-\dfrac{1}{4}$.

解：（1）依题意，由椭圆的对称性，$P_3=\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 均在椭圆 C 上，

所以 $P_1(1,1)$ 不在椭圆 C 上，$P_2(0,1)$ 在椭圆 C 上.　　　　……1 分

所以 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1, \\ a>b>0, \end{cases}$**，解得** $\begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　　……5 分

（II）设 $A(m,n)$，$m^2+4n^2=0$，$m\neq 0$，$n\neq 0$.　　　　……6 分

则 $B(-m,-n)$，$M(m,0)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{n}{m}$，$k_{BM}=\dfrac{n}{2m}$.

又因为 AD⊥AB，所以直线 AD 的方程为 $y=-\dfrac{m}{n}(x-m)+n$.　　　　……7 分

联立直线 AD 与椭圆 C 的方程，得 $\dfrac{x^2}{4}+\left[-\dfrac{m}{n}(x-m)+n\right]^2=1$，

化简得 $n^2x^2+4\left[-m(x-m)+n^2\right]^2=4n^2$，

即（$(n^2+4m^2)x^2-8m(m^2+n^2)x+4m^2+8m^2n^2+4n^4-4n^2=0$.

依愿意，$\Delta>0$，$x_A+x_D=\dfrac{8m(m^2+n^2)}{n^2+4m^2}$.

所以 $x_D=\frac{8m\left(m^2+n^2\right)}{n^2+4m^2}-m=\frac{m\left(4m^2+7n^2\right)}{n^2+4m^2}$. ……10 分

所以 $y_D=-\frac{m}{n}(x_D-m)+n=-\frac{m}{n}x_D+\frac{m^2+n^2}{n}$.

所以 $k_{BD}=\frac{y_D+n}{x_D+m}=\frac{-\frac{m}{n}x_D+\frac{m^2+n^2}{n}+n}{x_D+m}=\frac{-mx_D+m^2+2n^2}{n\left(x_D+m\right)}$,

所以 $k_{BD}=\frac{-m\frac{m\left(4m^2+7n^2\right)}{n^2+4m^2}+m^2+2n^2}{n\left[\frac{m\left(4m^2+7n^2\right)}{n^2+4m^2}+m\right]}=\frac{-m^2\left(4m^2+7n^2\right)+\left(m^2+2n^2\right)\left(n^2+4m^2\right)}{nm\left(4m^2+7n^2+n^2+4m^2\right)}$

$=\frac{2m^2n^2+2n^4}{nm\left(8m^2+8n^2\right)}=\frac{n}{4m}$

所以直线 **BD** 的方程为 $y=\frac{n}{4m}(x+m)-n$.

令 $\frac{n}{4m}(x+m)-n=0$，得 $x=3m$， $E(3m,0)$. ……13 分

所以 $k_{AE}=\frac{0-n}{3m-m}=-\frac{n}{2m}$，即 $k_{AN}=-\frac{n}{2m}$

又因为 $k_{MN}=k_{BM}=\frac{n}{2m}$，所以 $k_{AN}=-k_{MN}\neq 0$.

又因为 $|AN|=\sqrt{1+k_{AN}^2}\,|x_N-m|$， $|MN|=\sqrt{1+k_{MN}^2}\,|x_N-m|$

所以 $|AN|=|MN|$，**△AMN 为等腰三角形.** ……15 分

（21）（本题满分 15 分）已知 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，

记 $A_i=\{x|x=a+t_i,a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数。

（Ⅰ）若 $n=5$，$A=\{1,2,5\}$，$A_1\cap A_2=\varnothing$，求 T；

（Ⅱ）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$？说明理由；

（Ⅲ）若 $|A|=5$，对于任意的 A，都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$，求 n 的最小值。

解：记 $B_i=\{x\,|\,x=a+i,a\in A\}(i\in S)$，则 $A_i=B_{t_i}(i=1,2)$，$T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$.

（Ⅰ）因为 $S=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,5\}$，

所以 $B_1=\{2,3,6\}$，$B_2=\{3,4,7\}$，$B_3=\{4,5,8\}$，$B_4=\{5,6,9\}$，$B_5=\{6,7,10\}$

又因为 $A_1\cap A_2=\varnothing$，即 $B_{t1}\cap B_{t2}=\varnothing$.

所以 $T=\{1,3,\},\{2,4\}$ 或.$\{3,5\}$.　　　　　　　　　　……5 分

（Ⅱ）不是都存在.　　　　　　　　　　……6 分

因为 $S=\{1,2,\ldots 7\}$，$|A|=4$，令 $A=\{1,2,5,7\}$，

则 $B_1=\{2,3,6,8\}$，$B_2=\{3,4,7,9\}$，$B_3=\{4,5,8,10\}$，$B_4=\{5,6,9,11\}$，$B_5=\{6,7,10,12\}$，

$B_6=\{7,8,11,13\}$，$B_7=\{8,9,12,14\}$.

所以对于任意的 $T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，都有 $B_{t1}\cap B_{t2}\neq\varnothing$

所以当 $A=\{1,2,5,7\}$ 时，不存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$.　　　　　　……10 分

（Ⅲ）显然 $n\geq 5$.

不妨设 $t_2>t_1$，记 $D_A=\{x\,|\,x=a-b>0,a,b\in A\}$

因为 $S=\{1,2,\ldots n\}$，$A\subseteq S$，所以 $D_A\subseteq\{1,2,\ldots n-1\}$.

因为 $A_1\cap A_2=\varnothing\Leftrightarrow\forall a,b\in A,a+t_1\neq b+t_2\Leftrightarrow\forall a,b\in A,a-b\neq t_2-t_1$.

所以 $A_1\cap A_2=\varnothing\Leftrightarrow t_2-t_1\notin D_A$.

依题意，对于任意的 $A\subseteq S(|A|=5)$，都存在 $T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，使得 $t_2-t_1\notin D_A$.

又因为 $S=\{1,2,\ldots n\}$， t_2-t_1 的取值范围是 $\{1,2,\ldots n-1\}$，

所对于任意的 A，都存在 $t\in\{1,2,\ldots n-1\}$， $t\notin D_A$，

即对于任意的 A， D_A 均为 $\{1,2,\ldots n-1\}$ 的真子集.

（1）当 $n=5$ 时，存在 $A=\{1,2,3,4,5\}$，使得 $D_A=\{1,2,3,4\}$，舍.

当 $n=6$ 时，存在 $A=\{1,2,3,4,6\}$，使得 $D_A=\{1,2,\ldots,5\}$，舍.

当 $n=7$ 时，存在 $A=\{1,2,3,4,7\}$，使得 $D_A=\{1,2,\ldots,6\}$，舍.

当 $n=8$ 时，存在 $A=\{1,2,3,4,8\}$，使得 $D_A=\{1,2,\ldots,7\}$，舍.

当 $n=9$ 时，存在 $A=\{1,2,6,7,9\}$，使得 $D_A=\{1,2,\ldots,8\}$，舍.

当 $n=10$ 时，存在 $A=\{1,2,5,8,10\}$，使得 $D_A=\{1,2,\ldots,9\}$，舍.

（2）当 $n=11$ 时，假设存在 A，使得 D_A 不是 $\{1,2,\ldots 10\}$ 的真子集，则 $D_A=\{1,2,\ldots,10\}$.

另一方面，因为 $|A|=5$，所以 D_A 至多有 $C_5^2=10$ 个元素.

设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\subseteq S$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$.

则 $D_A=\{x\mid x=a_j-a_i,1\le i<j\le 5\}=\{1,2,\ldots,10\}$.

所以 D_A 恰有 10 个元素，这些元素之和为 1＋2＋...＋10＝55，也等于

$(a_2-a_1)+(a_3-a_1)+(a_4-a_1)+(a_5-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_2)+(a_5-a_2)$.

$+(a_4-a_3)+(a_5-a_3)+(a_5-a_4)=4a_5+2a_4-2a_2-4a_1$

由于 55 是奇数， $4a_5+2a_4-2a_2-4a_1$ 是偶数，矛盾.所以假设不成立.

所以对于任意的 A， D_A 均为 $\{1,2,\ldots 10\}$ 的真子集.

即对于任意的 A，都存在 $T=\{t_1,t_2\}\subseteq S$，使得 $t_2-t_1\notin D_A$.

即对于任意的 A，都存在 T，使得 $A_1\cap A_2=\varnothing$.

综上所述， n 的最小值为 11.　　　　　　　　　　　　……15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。