2023届高三年级5月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. C 【解析】由 $z(1+2i)=|1+2\sqrt{6}i|$ 可得 $z=\frac{|1+2\sqrt{6}i|}{1+2i}=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$，则 z 的虚部为 -2. 故选 C.

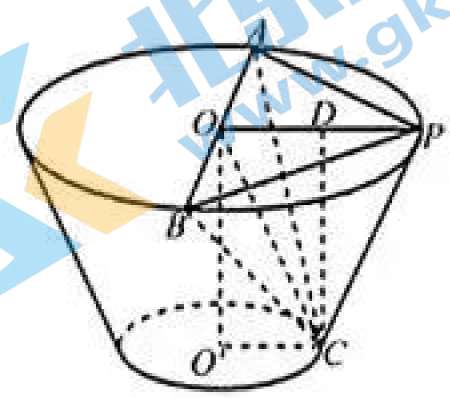
2. C 【解析】因为 $A=\{x\in Z|-1<x<3\}=\{0,1,2\}$，$\complement_R B=\{x|3x-a\geqslant 0\}=\left\{x\middle|x\geqslant\frac{a}{3}\right\}$，因为 $A\cap(\complement_R B)=\{1,2\}$，所以 $0<\frac{a}{3}\leqslant 1$，解得 a 的取值范围为 $(0,3]$. 故选 C.

3. B 【解析】一组变量之间的相关系数为 $|r|$ 越大，则具有较强的线性相关关系，因 $r_1=0.1>-0.9=r_2$，则第二组变量比第一组的线性相关关系强，故 A 不正确，B 正确；残差平方和越小的模型，拟合的效果越好，故 C 不正确；用决定系数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越大说明拟合效果越好，故 D 不正确. 故选 B.

4. C 【解析】因为 $f(x)=\left(\frac{2}{1+e^x}-1\right)\cos x$ 为奇函数，图象关于原点对称，所以排除 A，D. 因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以排除 B. 故选 C.

5. A 【解析】$\because b=1$，$\cos A-a\cos B=a$，$\therefore b\cos A-a\cos B=a$，$\therefore$ 由正弦定理得，$\sin B\cos A-\sin A\cos B=\sin A$，$\therefore \sin(B-A)=\sin A$，$\therefore B-A=A$ 或 $B-A+A=\pi$，解得：$B=2A$ 或 $B=\pi$（舍），又$\because\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $C=\pi-A-B=\pi-3A$，$\therefore\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<2A<\frac{\pi}{2}\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

6. A 【解析】设 O' 为下底面圆的圆心，连接 OO'，CO' 和 CO，因为 $AP=BP$，所以 $AB\perp OP$，又因为 $AB\perp OO'$，$OP\cap OO'=O$，OP、$OO'\subset$ 平面 $OO'P$，所以 $AB\perp$ 平面 $OO'P$，因为 PC 是该圆台的一条母线，所以 O，O'，C，P 四点共面，且 $O'C\parallel OP$，又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 POC，又因为平面 $ABC\cap$ 平面 $POC=OC$，所以点 P 在平面 ABC 的射影在直线 OC 上，则 OP 与平面 ABC 所成的角即为 $\angle POC=\angle OCO'$，过点 C 作 $CD\perp OP$ 于点 D，因为 $OP=4$ cm，$O'C=2$ cm，所以 $\tan\angle POC=\tan\angle OCO'=\frac{OO'}{O'C}=2$. 故选 A.



7. C 【解析】由八卦图可知，八卦中全为阳线和全为阴线的卦各有一个，两阴一阳和两阳一阴的卦各有三个，所以 $P(AB)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{9}{28}$，$P(B)=\frac{C_3^2+C_3^1C_5^1}{C_8^2}=\frac{9}{14}$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

8. D 【解析】设轧辊的半径为 r，则 $\pi r^2=\frac{640\ 000}{\pi}$，所以 $r=\frac{800}{\pi}$，所以轧辊的周长为 $2\pi r=1\ 600$ mm，设输入

第一对面带的厚度为 β mm，宽度为 γ mm，因为第 k 对轧辊出口处相邻疵点间距离为轧辊周长，所以在第 k 对出口处的两疵点间面带的体积为 $1\,600\beta(1-0.2)^k\gamma(\text{mm}^3)$，而在擀面机出口处两疵点间面带的体积为 $L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma(\text{mm}^3)$，因宽度相等，且无损耗，由体积相等得，$1\,600\beta(1-0.2)^k\gamma=L_k\beta(1-0.2)^{10}\gamma$，所以 $L_k=1\,600\times0.8^{k-10}$ mm. 故选 D.

二、多选题

9. BC 【解析】A. 因为 $a\cdot n_1=0$，所以 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，所以 A 错误；B. 因为 $n_1\cdot n_2=0$，所以 $\alpha\perp\beta$，所以 B 正确；C. 显然 $a\parallel b$ 不成立，所以 l 与 m 为相交直线或异面直线，所以 C 正确；D. a 在 b 向量上的投影向量为 $\frac{a\cdot b}{|b|^2}\cdot b=-\frac{4}{5}\times(0,1,-2)=\left(0,-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$，所以 D 错误. 故选 BC.

10. ABD 【解析】因为 $a^2+b^2=c^2$，$a<b$，所以 $a<b<c$，且 a,b,c 为一个直角三角形的三边，所以 $a+b>c$，$2a<b+c$，所以 $\frac{a+b}{c}>1$，$\frac{b+c}{a}>2$，所以 A，B 成立；双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条斜率为正的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，因为点 $P(2,3)$ 在渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的右侧，所以 $\frac{b}{a}>\frac{3}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}>\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以 C 不成立，D 成立. 故选 ABD.

11. AB 【解析】由二项式定理得，$f(x)=(x-1)^5$，所以 $f(x)$ 可以被 $(x-1)^4$ 整除，所以 A 正确；$f(x+y+1)=(x+y)^5$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除，所以 B 正确；C. $f(30)=29^5=(27+2)^5=27^5+C_5^1\times27^4\times2+\cdots+C_5^4\times27\times2^4+C_5^5\times2^5$，所以 $f(30)$ 被 27 除的余数即为 2^5 被 27 除的余数为 5，所以 C 错误；D. $f(29)=28^5$，而 28^5 与 8^5 的个位数相同，所以 $f(29)$ 的个位数为 8，故 D 错误. 故选 AB.

12. ABC 【解析】设该直线与 $f(x)$ 相切于点 $(x_1,x_1^3-x_1)$，因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以 $f'(x_1)=3x_1^2-1$，所以该切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，即 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$. 设该直线与 $g(x)$ 相切于点 $(x_2,x_2^2-a^2+a)$，因为 $g'(x)=2x$，所以 $g'(x_2)=2x_2$，所以该切线方程为 $y-(x_2^2-a^2+a)=2x_2(x-x_2)$，即 $y=2x_2x-x_2^2-a^2+a$，所以 $\begin{cases}3x_1^2-1=2x_2\\-2x_1^3=-x_2^2-a^2+a\end{cases}$，所以 $-a^2+a=x_2^2-2x_1^3=\left(\frac{3x_1^2-1}{2}\right)^2-2x_1^3=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$，令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$，$\therefore h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$；$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(0,1)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；$\therefore h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$，$(0,1)$ 上单调递减；在 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增；又 $h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}$，$h(1)=-1$，所以 $h(x)\in[-1,+\infty)$，所以 $-a^2+a\geq-1$，解得，$\frac{1-\sqrt5}{2}\leq a\leq\frac{1+\sqrt5}{2}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right]$，A 显然正确；B. $-\frac{\sqrt2}{4}-\frac{1-\sqrt5}{2}=\frac{2\sqrt5-(2+\sqrt2)}{4}>0$，所以 $\frac{1-\sqrt5}{2}<-\frac{\sqrt2}{4}<0$，所以 B 正确；C. 因为 $0<\log_2\sqrt7<\log_2 2\sqrt2=\frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt5}{2}$，所以 C 正确；D. 因为 $\frac{\sqrt e}{\pi}+\frac{\pi}{\sqrt e}>2\sqrt{\frac{\sqrt e}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\sqrt e}}=2>$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 D 不正确. 故选 ABC.

三、填空题

13. 充分不必要　【解析】$D \Leftrightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$，所以 $D \Rightarrow C$，但 A 不能推出 B，且 C 不能推出 A，所以 D 是 Q 的充分不必要条件. 故答案为充分不必要.

14. -265　【解析】由 $S_5=55$ 得，$5a_3=65$，所以 $a_3=11$，所以公差 $d=a_3-a_2=-3$，所以 $a_n=a_2+(n-2)d=20-3n$，所以 $a_{3n-1}=23-9n$，所以数列 $\{a_{3n-1}\}$ 的前 10 项的和为 $\frac{10\times(14-67)}{2}=-265$.

故答案为 -265.

15. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　【解析】根据题意，O 是 BC 中点，所以 AO 是 $\triangle ABC$ 的中线，又 BD 是中线，所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $AO=3FO$，所以 $b=3c$，所以 $b^2=9c^2$，$a^2-c^2=9c^2$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$　【解析】由正弦函数的性质可知，当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调时，$N-M$ 取得最大值，$N-M=\left|f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-f(\alpha)\right|=\left|\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|=|\sqrt{3}\cos 2\alpha|\leqslant\sqrt{3}$；当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上不单调，且当 $f(x)$ 在 $\left[\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3}\right]$ 上的图象具有对称性时，即 $f(x)$ 在 $x=\frac{\alpha+\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}=\alpha+\frac{\pi}{6}$ 取得最大值或最小值时，$N-M$ 取得最小值，此时有 $2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $N-M=\left|f(\alpha)-f\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2\alpha\right|=\left|\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\left|\sin\left(k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2}$，所以 $N-M$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$，故答案为 $\left[\frac{1}{2},\sqrt{3}\right]$.

四、解答题

17. 解：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_1,3a_3,a_2$ 成等差数列，所以 $6a_3=a_1+a_2$，$q\neq 1$，所以 $6a_1q^2=a_1+a_1q$，

所以 $6q^2=1+q$，又 $q>0$，所以 $q=\frac{1}{2}$，

因为 $S_4=\frac{15}{8}$，所以 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{15}{8}$，所以 $a_1=1$，

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.　(3 分)

所以 $S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$S_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\frac{S_{n+1}-2}{S_n-2}=\frac{1}{2}$，

又 $S_1-2=-1$，所以数列 $\{S_n-2\}$ 是首项为 -1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列；　(5 分)

(2) 由 (1) 得，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right]=-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.　(6 分)

所以 $-T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ①，

$-\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ②，　(8 分)

① − ② 得，$-\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.　(9 分)

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-(2+n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

整理得：$T_n=(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-4$. （10 分）

18. 解：(1)由题中数据可得：

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$，

$\bar{y}=\frac{1.2+1.8+2.5+3.2+3.8}{5}=\frac{12.5}{5}=2.5$.

$\therefore \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-1.3)+(-1)\times(-0.7)+0+1\times0.7+2\times1.3=6.6$.

（2 分）

又 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=4.36$.

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$=\frac{6.6}{\sqrt{10}\times\sqrt{4.36}}=\frac{6.6}{\sqrt{43.6}}\approx\frac{6.6}{6.603}>0.75$.

（4 分）

故 2023 年 1－5 月份 x 与接待游客人数 y 之间有较强的线性相关程度.

由上可知 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{6.6}{10}=0.66$.

$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=2.5-0.66\times3=0.52$.

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.66x+0.52$.

（6 分）

(2)零假设为

H_0：游客对本地景区满意度与报团游或自助游无关联.

依题意，完善表格如下：

	报团游	自助游	合计
满意	15	3	18
不满意	5	7	12
合计	20	10	30

（8 分）

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\frac{30\times(15\times7-15)^2}{20\times10\times18\times12}=5.625>3.841=x_{0.05}$.

（10 分）

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为游客对本地景区满意度与报团游或自助游有关联. （12 分）

19. 解：(1)由题意得 $S_1=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，则 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $a^2+c^2-b^2=2\sqrt{2}$. （2 分）

由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=\sqrt{2}$.

因为 $\cos B=\frac{5}{13}$，所以 $\sin B=\frac{12}{13}$. （4 分）

所以 $ac=\frac{\sqrt{2}}{\cos B}=\frac{13\sqrt{2}}{5}$. （5 分）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{6\sqrt{2}}{5}$. （6 分）

(2)因为 $\cos A=\frac{3}{5}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\frac{4}{5}\cos B+\frac{3}{5}\sin B=\frac{56}{65}$，

（8 分）

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

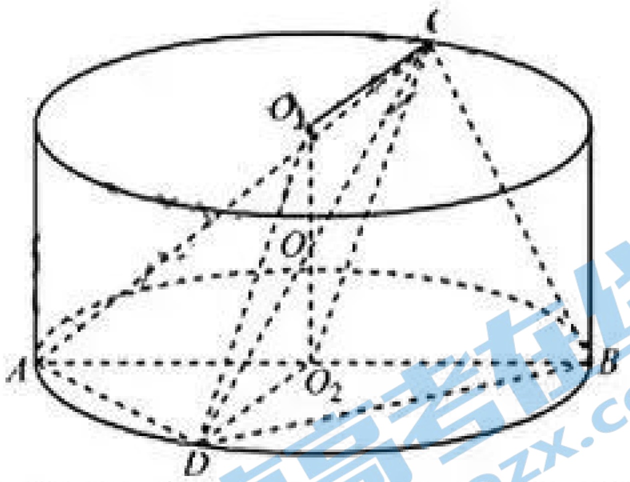
所以 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\sqrt{\frac{ac}{\sin A\sin C}}$，（10 分）

所以 $a+b+c=(\sin A+\sin B+\sin C)\sqrt{\frac{ac}{\sin A\sin C}}$

$$=\frac{168}{65}\sqrt{\frac{\frac{13\sqrt{2}}{5}}{\frac{4}{5}\times\frac{56}{65}}}=\frac{3}{5}\sqrt{70\sqrt{2}}.$$

所以 $(a+b+c)^2=\frac{126\sqrt{2}}{5}$.（12 分）

20. 解：(1)连接 O_1C，O_2C，O_1D，O_2D，如图所示.



因为线段 CD 与线段 O_1O_2 交于 O 点，所以 C，O_1，D，O_2 四点共面，又因为圆柱 O_1O_2 的上下底面平行，所以 $O_1C\parallel O_2D$.（2 分）

因为 $O_1C=O_2D$，所以四边形 CO_1DO_2 为平行四边形.

所以 $OO_1=OO_2$，即 O 为线段 O_1O_2 的中点.（4 分）

(2)设圆柱的底面半径和高分别为 r，h.

因为圆柱 O_1O_2 的体积和侧面积都为 8π，所以 $\begin{cases}\pi r^2h=8\pi\\2\pi rh=8\pi\end{cases}$，

所以 $r=h=2$.（5 分）

延长 DO_2 交 $\odot O_2$ 于点 E，连接 CE，因为 E 在 $\odot O_2$ 上，AB 为 $\odot O_2$ 的直径，

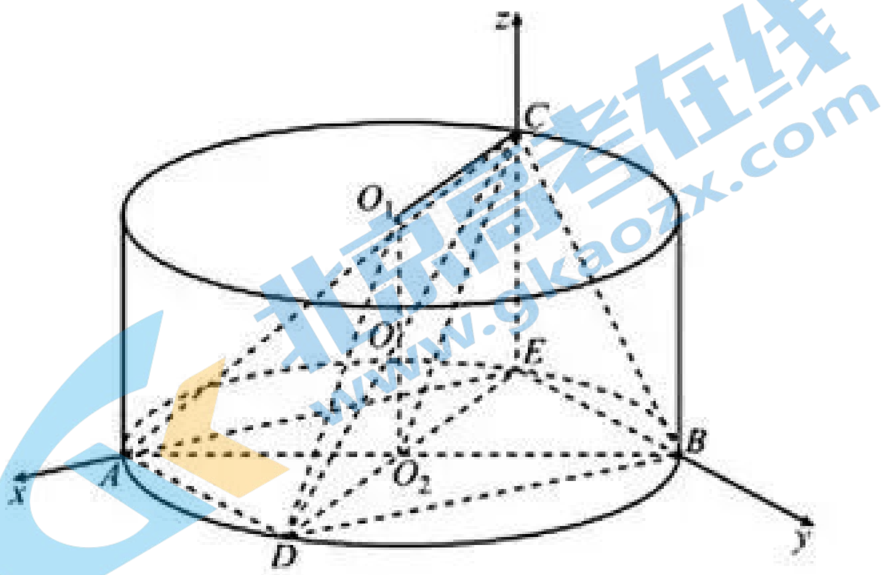
所以 $AE\perp BE$，因为 $O_1C=O_2E$，$O_1C\parallel O_2E$，所以四边形 CO_1O_2E 为平行四边形.

所以 $O_1O_2\parallel CE$，所以 $CE\perp$ 平面 ABE.（6 分）

所以 $\angle CAE$ 为直线 AC 与下底面所成的角，所以 $\angle CAE=\frac{\pi}{6}$.

因为 $CE=2$，所以 $AE=2\sqrt{3}$，所以 $BE=2$.（7 分）

因为 EA，EB，EC 两两垂直，如图所示，以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EC}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



所以 $A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,2)$，$D(2\sqrt{3},2,0)$.

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{3},2,-2)$，$\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{3},0,0)$.

设平面 ACD 的法向量为 $n_1=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AD}=0\\n\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$$

则 $\begin{cases}2y=0\\2\sqrt{3}x+2y-2z=0\end{cases}$，不妨取 $n_1=(1,0,\sqrt{3})$.（9 分）

同理可求平面 BCD 的法向量为 $n_2=(0,1,1)$.（10 分）

设平面 ACD 与平面 BCD 所成的锐角为 θ，

所以 $\cos\theta=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

即平面 ACD 与平面 BCD 所成锐角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.（12 分）

21. 解：(1)设动点 E 的坐标为 (x,y)，由已知得，$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$.

化简得：$y^2=\begin{cases}4x,x\geq0\\0,x<0\end{cases}$，故曲线 C 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x,x\geq0\\0,x<0\end{cases}$；（2 分）

(2)因为点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$分别为曲线 C 上的第一象限和第四象限的点，所以当直线 AB 的斜率为 0 时，不适合题意；当直线 AB 的斜率不为 0 时，设直线 AB 的方程为 $x=ay+t$.

由$\begin{cases}x=ay+t\\y^2=4x\end{cases}$得，$y^2-4ay-4t=0$. $\Delta=16a^2+16t>0$.

所以$\begin{cases}y_1+y_2=4a\\y_1y_2=-4t\end{cases}$　　(4 分)

由 $y_1y_2=-4t<0$，得 $t>0$.

因为 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{9}{4}$，所以 $(ay_1+t)(ay_2+t)+y_1y_2=\frac{9}{4}$，所以 $(a^2+1)y_1y_2+at(y_1+y_2)+t^2=\frac{9}{4}$.

所以 $(a^2+1)(-4t)+at\cdot4a+t^2=\frac{9}{4}$.

解得 $t=\frac{9}{2}$ 或 $t=-\frac{1}{2}$(舍去).　　(6 分)

当 $t=\frac{9}{2}$ 时，直线 AB 的方程为 $x=ay+\frac{9}{2}$，直线 AB 过定点 $\left(\frac{9}{2},0\right)$，且满足 $\Delta>0$，且 $y_1y_2=-4t=-18$.　　(8 分)

所以 $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times|y_1-y_2|+\frac{1}{2}y_1=\frac{11}{4}y_1-\frac{9}{4}y_2\geqslant2\sqrt{\frac{11}{4}y_1\cdot\left(-\frac{9}{4}y_2\right)}=\frac{3}{2}\sqrt{-11y_1y_2}=\frac{9}{2}\sqrt{22}$.　　(11 分)

当且仅当 $\frac{11}{4}y_1=-\frac{9}{4}y_2$，即 $y_1=\frac{9\sqrt{22}}{11}$，$y_2=-\sqrt{22}$ 时取等号，故最小值为 $\frac{9}{2}\sqrt{22}$.　　(12 分)

22. 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=-2\ln x+x-\frac{1}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

所以 $f'(x)=-\frac{2}{x}+1+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，所以结论成立；　　(2 分)

(2) $f'(x)=\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2}(x>0)$.

①当 $a-1\leqslant0$，即 $a\leqslant1$ 时，$x-(a-1)>0$.

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)\geqslant f(1)=-a+2>0$，因此函数 $f(x)$ 没有零点；　　(3 分)

②当 $a-1>1$，即 $a>2$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>a-1$；令 $f'(x)<0$，得 $1<x<a-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,a-1)$ 上单调递减，在 $(a-1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)$ 的极大值 $f(1)=-a+2<0$，$f(e^a)=e^a-a^2-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}$.　　(4 分)

令 $F(x)=e^x-x^2-x(x>2)$，则 $F'(x)=e^x-2x-1$.

令 $\varphi(x)=e^x-2x-1(x>2)$，则 $\varphi'(x)=e^x-2>0$.

所以 $F'(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F'(x)>F'(2)=e^2-5>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)>F(2)=e^2-6>0$，即 $e^x-x^2>x(x>2)$.

因此 $f(e^a)=e^a-a^2-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}>a-\frac{a}{e^a}+\frac{1}{e^a}=a\left(1-\frac{1}{e^a}\right)+\frac{1}{e^a}>0$，又 $e^a>1$，故函数 $f(x)$ 只有一个零点；　　(6 分)

③当 $a-1=1$，即 $a=2$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在

$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f(1)=-a+2=0$，故函数 $f(x)$只有一个零点；(7 分)

④当 $0<a-1<1$，即 $1<a<2$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<a-1$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $a-1<x<1$.

所以 $f(x)$在$(0,a-1)$上单调递增，在$(a-1,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. 故 $f(x)$的极小值 $f(1)=-a+2>0$. (8 分)

令 $h(x)=\ln x-\sqrt{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

易知当 $x=4$ 时，$h(x)$取得最大值，所以 $h(x)\leqslant h(4)=\ln 4-\sqrt{4}=2(\ln 2-1)<0$.

所以 $\ln x<\sqrt{x}$，令 $m=\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2$，则 $0<m<\dfrac{1}{16}<1$. (9 分)

所以 $f(m)=-a\ln m+m+\dfrac{1-a}{m}=a\ln\dfrac{1}{m}+\dfrac{1-a}{m}+m$. 由 $m=\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ 得 $\sqrt{m}=\dfrac{a-1}{2a}$，所以 $f(m)<a\sqrt{\dfrac{1}{m}}+\dfrac{1-a}{m}+m=\dfrac{a\sqrt{m}+1-a}{m}+m<\dfrac{a\cdot\dfrac{a-1}{2a}+1-a}{m}+1=\dfrac{m-\dfrac{a-1}{2}}{m}$.

由 $\dfrac{a-1}{2a}<\dfrac{a-1}{2}<1$ 得，$m=\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}<\dfrac{a-1}{2}$，所以 $f(m)<\dfrac{m-\dfrac{a-1}{2}}{m}<0$.

所以函数 $f(x)$只有一个零点. (11 分)

综上，当 $a\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)$没有零点；当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$只有一个零点. (12 分)