延庆区 2021-2022 学年第一学期期末试卷高二数学　　2022.01

一、选择题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）方程 $x^2-xy+2y=0$ 的曲线经过的一点是　　（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,1)$　　（C）$(1,-1)$　　（D）$(-1,1)$

（2）抛物线 $y=x^2$ 的焦点坐标为　　（　　）

（A）$(0,\frac{1}{4})$　　（B）$(0,\frac{1}{2})$　　（C）$(\frac{1}{4},0)$　　（D）$(0,-\frac{1}{4})$

（3）函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[2,4]$ 上的平均变化率等于　　（　　）

（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）8

（4）$f(x)=\sin x$，则 $f'(\frac{\pi}{3})=$　　（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

（5）双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线方程为　　（　　）

（A）$y=\pm\frac{5}{3}x$　　（B）$y=\pm\frac{3}{5}x$　　（C）$y=\pm\frac{3}{4}x$　　（D）$y=\pm\frac{4}{3}x$

（6）下列椭圆中，焦点坐标是 $(0,\pm\sqrt{3})$ 的是　　（　　）

（A）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$　　（B）$4x^2+y^2=4$

（C）$3x^2+2y^2=6$　　（D）$4x^2+y^2=1$

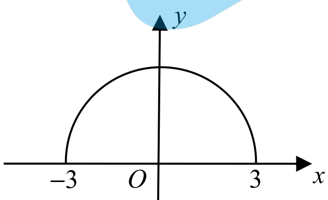
（7）函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 的图像如右图所示，则下列大小关系正确的是　　（　　）

（A）$f'(-2)<f'(-1)<f'(1)$

（B）$f'(-1)<f'(1)<f'(-2)$

（C）$f'(1)<f'(-1)<f'(-2)$

（D）$f'(1)<f'(-2)<f'(-1)$



（7 题图）

（8）$f(x)=e^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为　　（　　）

（A）$y=x$　　（B）$y=x+e$　　（C）$y=ex+1$　　（D）$y=x+1$

（9） 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2， P 是 C 上一点，

$PF_2\perp x$ 轴， $\angle PF_1F_2=30°$，则椭圆 C 的离心率等于 （ ）

（A） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （B） $\dfrac{1}{3}$ （C） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ （D） $\dfrac{1}{2}$

（10）若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1,F_2，点 P 是 C 上的一点，且 $|PF_1|=3|PF_2|$，

则双曲线 C 的渐近线与 x 轴的夹角的取值范围是（ ）

（A） $(0,\dfrac{\pi}{6}]$ （B） $(0,\dfrac{\pi}{3}]$ （C） $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ （D） $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题共 5 个小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到准线的距离为________________.

（12）椭圆 C 上一点 P 到两个焦点 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$ 的距离之和等于 6，则 C 的标准

方程为____________________.

（13）已知函数 $f(x)=x\ln x$，则 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=$_______________.

（14）方程 $x^2-2x+|y|=0$ 的曲线的一条对称轴是______， x 的取值范围是______.

（15） 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点作倾斜角为 $60°$ 的直线，与抛物线分别交于

A,B 两点（点 A 在 x 轴上方），$\dfrac{|AF|}{|BF|}=$_______________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

圆锥曲线 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{9-m}+\dfrac{y^2}{m-5}=1$.

（Ⅰ）若 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）若 C 表示焦点在 x 轴上且焦距为 8 的双曲线，求 m 的值.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-3,\dfrac{3}{2}]$ 上的最值.

（18）（本小题 14 分）

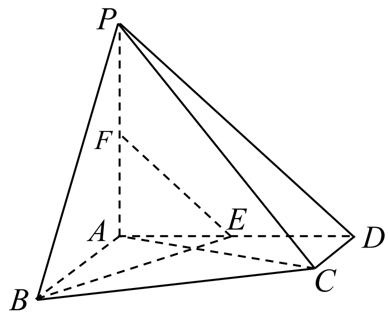
已知直线 $l: y=x+m$，抛物线 $C: y^2=4x$.

（Ⅰ）l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）O 是坐标原点，l 过 C 的焦点且与 C 交于 A,B 两点，求 ΔOAB 的面积.

（19）（本小题 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=AP=2$，$CD=1$，E,F 分别是 AD,AP 的中点.



（19 题图）

（Ⅰ）求证：$EF//$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求证：$BE\perp$ 平面 PAC；

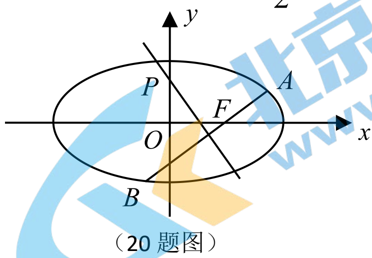
（Ⅲ）求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值.

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$，且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 $P(0,t)$，求 t 的取值范围.



（20 题图）

（21）（本小题 15 分）

已知定点 $A(0,\sqrt{3}),\ B(0,-\sqrt{3})$，动点 P 与 $A,\ B$ 连线的斜率之积 $k_{PA}\times k_{PB}=-\dfrac{3}{4}$.

（Ⅰ）设动点 P 的轨迹为 G，求 G 的方程；

（Ⅱ）若 C,D 是 G 上关于 y 轴对称的两个不同点，直线 AC,BD 与 x 轴分别交于点 M,N. 试判断以 MN 为直径的圆是否过定点，如经过，求出定点坐标；如不过定点，请说明理由.

延庆区 2021-2022 学年度高二数学试卷评分参考

一、选择题：（每小题 4 分，共 10 小题，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．C　　2．A．　　3．C　　4．B　　5．D

6．B　　7．C　　8．D　　9．A　　10．B

二、填空题：（每小题 5 分，共 5 个小题，共 25 分）

11．4．　　12．$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$．　　13．$\ln x+1$．

14．$y=0$（或 $x=1$），　$[0,2]$．　　15．3．

说明：两个空的题目，前 3 后 2

三、解答题：（共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤.）

16．（本小题满分 14 分）

计算题，结果正确，有大致步骤，给满分；结果正确，无步骤，只给结果分；结果不正确，有步骤，按步骤给分。

圆锥曲线 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{9-m}+\dfrac{y^2}{m-5}=1$．

（Ⅰ）若 C 表示焦点在 x 轴上椭圆，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）若 C 表示焦点在 x 轴上且焦距为 8 的双曲线，求 m 的值．

解：（Ⅰ）$\because$ C 表示椭圆，

$\therefore \begin{cases} 9-m>0 \\ m-5>0 \\ 9-m>m-5 \end{cases}$ ……………3 分

$\therefore \begin{cases} m<9 \\ m>5 \\ m<7 \end{cases}$ ……………6 分

$\therefore$ m. 的取值范围是 $(5,7)$． ……………7 分

（Ⅱ）$\because$ C 的焦点在 x 轴上，

$\therefore \begin{cases} 9-m>0 \\ m-5<0 \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} m<9 \\ m<5 \end{cases}$，

$\therefore m<5$ ……………9 分

$\because$ C 的焦距为 8，$\therefore$ $2c=8,\ c=4,$ ……………10 分

$a^2=9-m,\ b^2=5-m,$，

$\because\ c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ 16=9-m+5-m$，　　　　　　　　　　　　……………13 分

$\therefore\ m=-1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　……………14 分

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-3,\frac{3}{2}]$ 上的最值.

解：（Ⅰ）$f'(x)=3x^2-3$，　　　　　　　　　　　　　……………2 分

令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-3=0$，解得：$x=\pm1$，

令 $f'(x)>0$，即 $3x^2-3>0$，解得：$x<-1$ 或 $x>1$，　　……………4 分

令 $f'(x)<0$，即 $3x^2-3<0$，解得：$-1<x<1$，　　　……………6 分

$\therefore\ f(x)$，的单调增区间为 $(-\infty,-1]$，和 $[1,+\infty)$.　　　……………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，

$f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)=2$　　　　　……………9 分

$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=1^3-3\times1=-2$，　　　　　　……………11 分

又 $\because\ f(-3)=(-3)^3-3\times(-3)=-18$，　　　　　　……………12 分

$\because\ f(\frac{3}{2})=(\frac{3}{2})^3-3\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{8}$，　　　　　　　……………13 分

$\therefore\ f(x)_{\max}=f(-1)=2,\quad f(x)_{\min}=f(-3)=-18.$　　……………14 分

18．（本小题满分 14 分）

已知直线 $l:y=x+m$，抛物线 $C:y^2=4x$.

（Ⅰ）l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）O 是坐标原点，l 过 C 的焦点且与 C 交于 A,B 两点，求 ΔOAB 的面积.

解：（Ⅰ）$\because\ y=x+m,\quad \therefore\ x=y-m$，

代入 $y^2=4x$ 整理得：$y^2-4y+4m=0$，　　　　……………3 分

$\because\ l$ 与 C 有公共点，$\therefore\ \Delta=16-16m\geq0$，　　……………5 分

$\therefore\ m\le 1$， ……………6 分

$\therefore\ m$ 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ……………7 分

（Ⅱ）$\because\ y^2=4x$，$\therefore\ 2p=4,\ p=2,\ \dfrac{p}{2}=1$，

$\therefore\ C$ 的焦点为 $F(1,0)$ ……………8 分

$\because\ l$ 经过点 $F(1,0)$，

$\therefore\ l$ 的方程为 $y=x-1$， ……………9 分

$\therefore\ x=y+1$，

代入 $y^2=4x$ 整理得：$y^2-4y-4=0$， ……………10 分

解得：$y=\dfrac{4\pm\sqrt{16+16}}{2}=2\pm 2\sqrt{2}$， ……………11 分

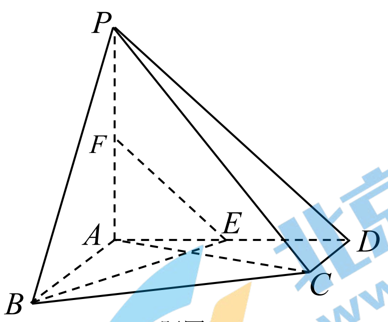
设 A,B 两点的坐标分别为 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),$，

则 $|y_1-y_2|=4\sqrt{2}$， ……………13 分

$\therefore\ S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=2\sqrt{2}.$ ……………14 分

19.（本小题 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=AP=2$，$CD=1$，E,F 分别是 AD,AP 的中点.



（19 题图）

（Ⅰ）求证：$EF//$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求证：$BE\perp$ 平面 PAC；

（Ⅲ）求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值.

（Ⅰ）证明：

$\because\ E,F$ 分别是 AD,AP 的中点，$\therefore\ EF//PD$ ……………2 分

$\because\ EF\not\subset$ 平面 PCD，$\therefore\ EF//$ 平面 PCD. ……………4 分

（Ⅱ）证明：

$\because\ PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore\ PA\perp AB,\ PA\perp AD,$

又 $\because\ AB\perp AD$，$\therefore\ PA,AB,AD$ 两两垂直，

建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 如图， ……………5 分

$B(2,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,2,0)$, $E(0,1,0)$, $P(0,0,2)$,

$\therefore\ \overrightarrow{BE}=(-2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$,

$\therefore\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2+0=0$,

$\therefore\ BE\perp AC$, ……………7 分

又$\because\ PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore\ PA\perp BE$, ……………8 分

$\therefore\ BE\perp$平面PAC. ……………9 分

（III） $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\therefore\ \overrightarrow{BE}=(-2,1,0)$，是平面$PAC$的法向量，……10 分

$$\cos<\overrightarrow{PB},\overrightarrow{BE}>=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{PB}|\times|\overrightarrow{BE}|}=\frac{2\times(-2)+0+0}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}$$ ……………12 分

$$=-\frac{\sqrt{10}}{5},$$ ……………13 分

设PB与平面PAC所成角为θ，

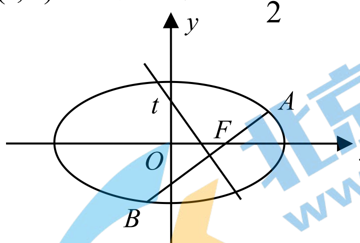
则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PB},\overrightarrow{BE}>|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……………14 分

20. （本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点是$F(1,0)$，且离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设过点F的直线交C于A,B两点，线段AB的垂直平分线交y轴于点$P(0,t)$，求t的取值范围.



（20 题图）

解：（Ⅰ） $\because\ c=1$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\ a=\sqrt{2}$ ……………2 分

$\therefore\ b^2=a^2-c^2=2-1=1$

$\therefore\ C$的方程是$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………4 分

（Ⅱ） 设AB的斜率为k，且$k\neq 0$，则AB的方程为$y=k(x-1)$，

代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$整理得：$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$， ……………5 分

设 A,B 的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$， A,B 的中点为 $G(x_0,y_0)$,

则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{1+2k^2}$, $y_0=k(x_0-1)=\dfrac{-k}{1+2k^2}$, ……………7 分

设线段 AB 的垂直平分线为 l'，

则 l' 的方程为： $y+\dfrac{k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{2k^2}{1+2k^2})$

令 $x=0$，得： $t=\dfrac{2k}{1+2k^2}-\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}$, ……………8 分

当 $k>0$ 时， $\dfrac{1}{k}+2k\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{k}\times 2k}=2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\dfrac{1}{k}=2k$，即 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

$\therefore\ 0<t\leq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立， ……………10 分

当 $k<0$ 时， $\dfrac{1}{k}+2k\leq -2\sqrt{\dfrac{1}{k}\times 2k}=-2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\dfrac{1}{k}=2k$ ，即 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

$\therefore\ 0>t\geq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立， …………12 分

特别地，当 k 不存在时，即 MN 与 x 轴垂直时， $t=0$， ……………13 分

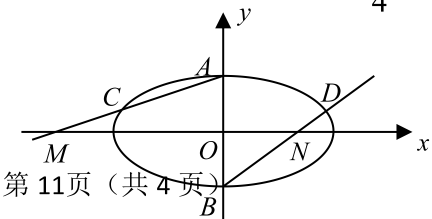
综上可得： t 的取值范围是 $[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}]$. ……………14 分

21. （本小题满分 15 分）

已知定点 $A(0,\sqrt{3})$, $B(0,-\sqrt{3})$，动点 P 与 A, B 连线的斜率之积 $k_{PA}\times k_{PB}=-\dfrac{3}{4}$.

（Ⅰ）设动点 P 的轨迹为 G，求 G 的方程；

（Ⅱ）若 C,D 是 G 上关于 y 轴对称的两个不同点，



（21 题图）

直线 AC,BD 与 x 轴分别交于点 M,N. 试判断以

MN 为直径的圆是否过定点，如经过，求出定点坐标；如不过定点，请说明理由.

解：（Ⅰ）设 P 的坐标为 (x,y)，

$$k_{PA}=\frac{y-\sqrt{3}}{x},\ k_{PB}=\frac{y+\sqrt{3}}{x},$$ ……………2 分

由已知得：$\dfrac{y-\sqrt{3}}{x}\times\dfrac{y+\sqrt{3}}{x}=-\dfrac{3}{4}$， ……………3 分

整理得：$3x^2+4y^2=12$，即 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\ (x\neq 0)$. ……………5 分

（Ⅱ）设 $C(x_0,y_0)$，则 $D(-x_0,y_0)$，

$$k_{AC}=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0},\ k_{BD}=\frac{y_0+\sqrt{3}}{-x_0},$$

$AC:y=\dfrac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}x+\sqrt{3},\ BD:y=-\dfrac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}x-\sqrt{3}$ ……………7 分

令 $y=0$，则 $x_M=\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}},\ x_N=\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}$， ……………8 分

设 MN 的中点为 E，则 E 的坐标为 $\left(\dfrac{\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}+\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}}{2},0\right)$，

即：$E:\left(\dfrac{-\sqrt{3}x_0y_0}{y_0{}^2-3},0\right)$ ……………9 分

$\because\ 3x_0{}^2+4y_0{}^2=12,\ \ \therefore y_0{}^2-3=-\dfrac{3}{4}x_0{}^2$，$E:\left(\dfrac{4\sqrt{3}y_0}{3x_0},0\right)$，

半径为：$\dfrac{|MN|}{2}=\dfrac{\left|\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0-\sqrt{3}}-\dfrac{-\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}\right|}{2}=\left|\dfrac{-3x_0}{y_0{}^2-3}\right|$， ……………10 分

$$=\left|\frac{-3x_0}{y_0{}^2-3}\right|=\left|\frac{4}{x_0}\right|$$

$\therefore$ 圆 E 的方程为：$\left(x-\dfrac{4\sqrt{3}y_0}{3x_0}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{x_0{}^2}\ \cdots\otimes$， ……………11 分

令 $x_0=-2$，则 $y_0=0$，代入 $\otimes$ 得：$x^2+y^2=4$， …① …………12 分

令 $x_0=-1$，则 $y_0=\frac{3}{2}$，代入⊗得：$(x+2\sqrt{3})^2+y^2=16$，…②……13 分

由①②得：$x=0,\ y=\pm 2$，代入⊗得：

$$(-\frac{4\sqrt{3}y_0}{3x_0})^2+4=\frac{16}{x_0{}^2},$$

$$48y_0{}^2+36x_0{}^2=9\times 16,$$

$$3x_0{}^2+4y_0{}^2=12,$$ ……………14 分

∵ 上式恒成立

∴ 圆 E 恒过定点 $(0,\pm 2)$. ………………15 分