高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分．满分150分，考试时间120分钟．
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚．
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效**。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知非空集合M，N是全集U的子集，$M\subseteq \complement_U N$，则$(\complement_U M)\cap N$

A. $\complement_U M$　　B. $\complement_U N$　　C. M　　D. N

2. 已知$z=1-\frac{1}{i^3}$，则z在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知$a=\log_{0.9}0.4$，$b=0.9^{-2}$，$c=\log_4 0.9$，则

A. $b<c<a$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

4. 已知甲、乙、丙3名志愿者参加2022年杭州亚运会的3个比赛项目的服务工作，每名志愿者只能参加1个比赛项目的服务工作，则乙、丙不在同一个比赛项目服务的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 在正四面体$ABCD$中，E为AB的中点，则直线CE与直线AD所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知$(mx+y)(x+y)^5$的展开式中各项系数之和为-32，则该展开式中含x^3y^3的项的系数为

A. -30　　B. -20　　C. -15　　D. -10

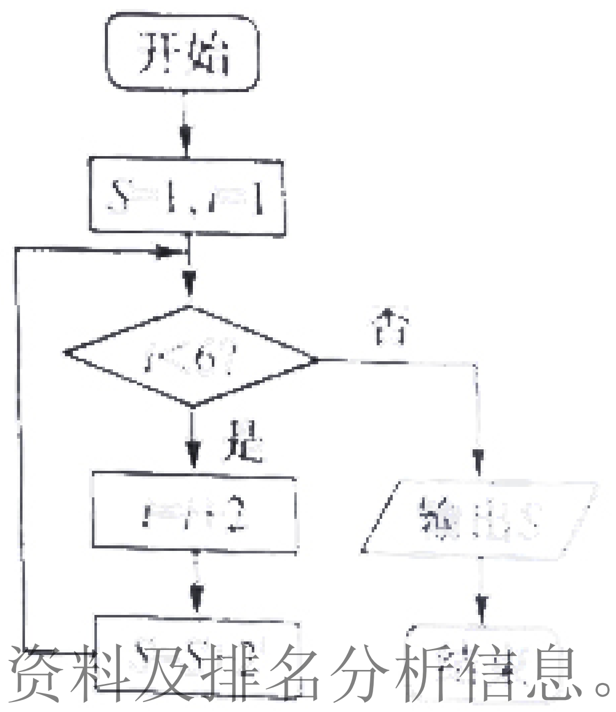
7. 执行如图所示的程序框图，则输出S的值为

A. 146

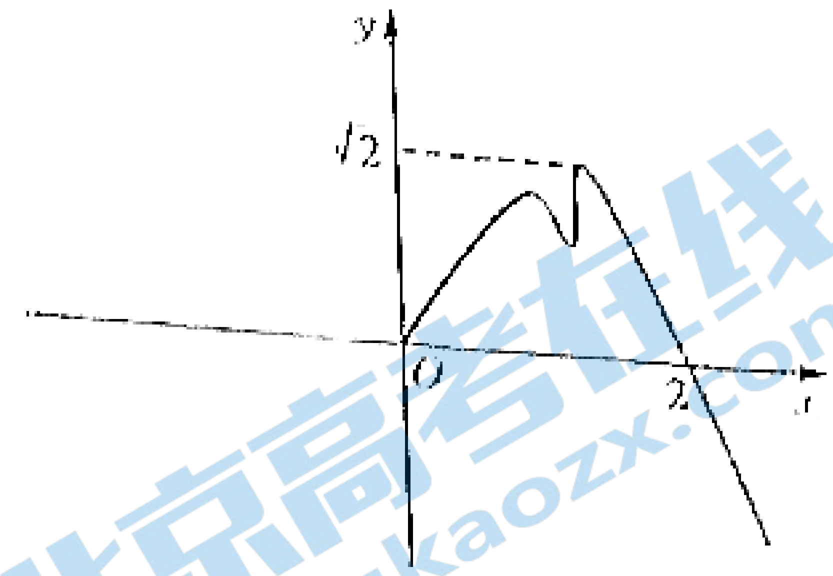
B. 156

C. 169

D. 176



8. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图象如图所示，则不等式 $x^2f(x)>2f(x)$ 的解集为



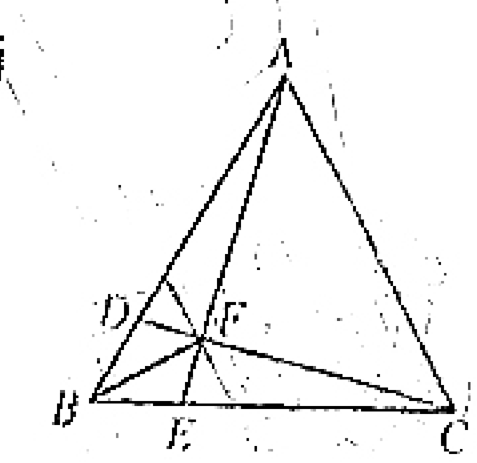
A. $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},2)$

B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},2)$

D. $(-2,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$

9. 如图，在△ABC 中，点 D，E 分别在边 AB，BC 上，且均为靠近 B 的四等分点，CD 与 AE 交于点 F，若 $\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $3x+y=$



A. -1　　B. $-\frac{3}{4}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{4}$

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $(-1,-1)$，且 C 的实轴长大于 $\sqrt{2}$，则 C 的离心率的取值范围为

A. $(1,\sqrt{2})$　　B. $(1,\sqrt{3})$　　C. $(\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(\sqrt{3},+\infty)$

11. 已知函数 $f(x)=3\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{9}\right)$ 内有最小值，无最大值，则 ω 的最大值为

A. 19　　B. 13　　C. 10　　D. 7

12. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有"数学王子"的称号. 用他的名字定义的函数称为高斯函数 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=5$，$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，若 $b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n 为数列 $\left\{\frac{1000}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和，则 $[S_{2022}]=$

A. 249　　B. 499　　C. 749　　D. 999

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}x-2y+2\geq 0,\\3x-y-3\leq 0,\\x+2\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ 的最大值为______.

14. 写出同时满足下面两个性质的数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式 $a_n=$______.

①$\{a_n\}$ 是递增的等差数列；② $a_2-a_3+a_4=1$.

15. 已知体积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 的圆锥的侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的外接球的表面积为

16. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，C 的准线与 x 轴交于点 A，过点 A 作曲线 C 的一条切线 AB，若切点 B 在第一象限内，D 为 C 上第四象限内的一点，且 $DF\parallel AB$，则 $\frac{|AB|}{|DF|}=$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17.（12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$A=\frac{2\pi}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=2\sin(A+C)$，$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$．

（1）求b,c的值；

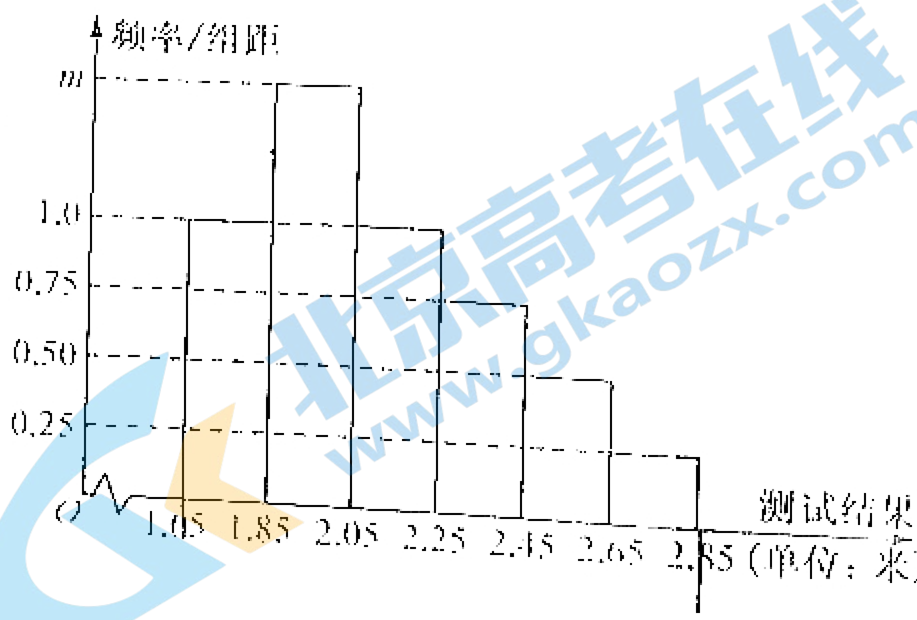
（2）设D为BC上一点，且$AD=\sqrt{21}$，求$\sin\angle ADB$．

18.（12 分）

大力开展体育运动，增强学生体质，是学校教育的重要目标之一．某校组织全校学生进行立定跳远训练，为了解训练的效果，从该校男生中随机抽出 100 人进行立定跳远达标测试，测试结果（单位：米）均在[1.65，2.85]内，整理数据得到如下频率分布直方图．学校规定男生立定跳远 2.05 米及以上为达标，否则为不达标．

（1）若男生立定跳远的达标率低于 60%，该校男生还需加强立定跳远训练．请你通过计算，判断该校男学生是否还需加强立定跳远训练；

（2）为提高学生的达标率，该校决定加强训练，经过一段时间训练后，该校男生立定跳远的距离ξ（单位：米）近似服从正态分布$N(2.25,\sigma^2)$，且$P(\xi\leqslant 2.45)=0.8$．再从该校任选 3 名男生进行测试，X表示这 3 人中立定跳远达标的人数，求X的分布列和数学期望$E(X)$．

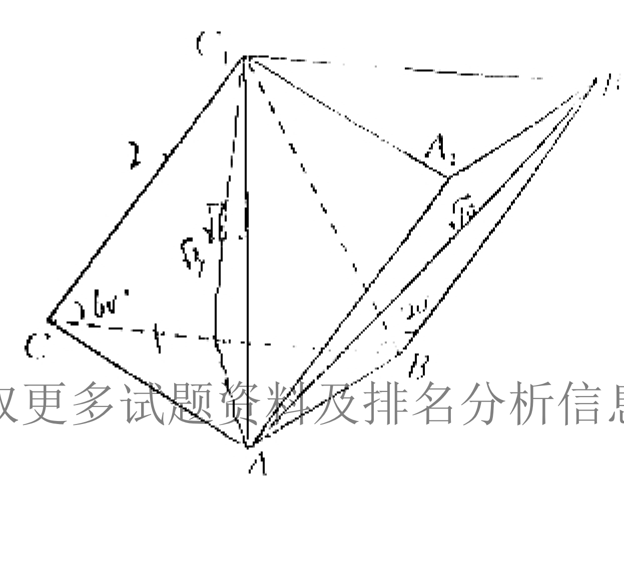


19.（12 分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面为等边三角形，侧面BCC_1B_1为菱形，$\angle CBB_1=120^\circ$，$AC_1=\sqrt{6}$，$AB_1=\sqrt{10}$．

（1）证明：$\triangle AB_1C_1$为直角三角形；

（2）求直线BC_1与平面AB_1C_1所成角的正弦值．



20.(12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知 $A(-4,0)$,$B(4,0)$,M 是一个动点,C,D 分别为线段 AM,BM 的中点,且直线 OC,OD 的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$. 记 M 的轨迹为 E.

(1)求 E 的方程;

(2)若过点 $F(2,0)$ 且不与 x 轴重合的直线与 E 交于 P,Q 两点,点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1(P_1 与 Q 不重合),直线 P_1Q 与 x 轴交于点 G,求 $\frac{|AG|}{|BG|}$ 的值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=ax^2-2e^x$ $(a\in\mathbf{R})$,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)讨论函数 $f'(x)$ 的单调性;

(2)当 $a<1$ 时,函数 $g(x)=f(x)+2\sin x$,证明:$g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{t}{2}+6, \\ y=-\frac{t}{3}-2 \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A,B 两点,P 为曲线 C 上的任意一点,求 $\triangle ABP$ 的面积的最小值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

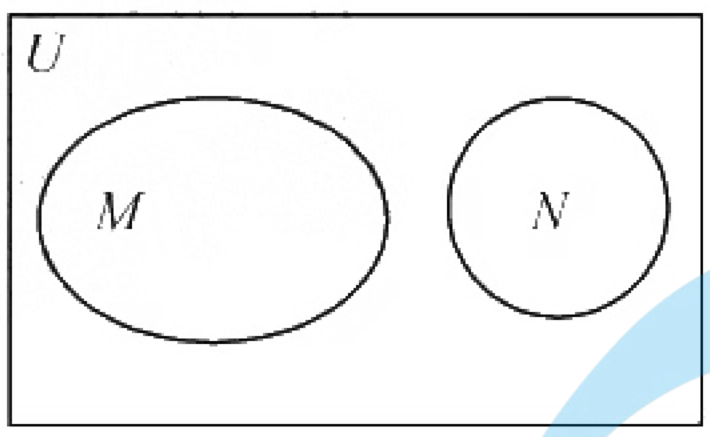
已知函数 $f(x)=|x-2|-|x+1|$,不等式 $f(x)\geq -m$ 的解集为 $(-\infty,1]$.

(1)求实数 m 的值;

(2)若正实数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=m$,证明:$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}ab$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1.D　根据题意，集合 M,N 间的关系如下图，易知 $M\cap N=\varnothing$，可用矩形表示全集 U，椭圆表示集合 M，圆表示集合 N. 根据图形可知，$N\subseteq \complement_U M$，所以 $(\complement_U M)\cap N=N$.



2.A　$z=1-\frac{1}{i^3}=1+\frac{1}{i}=1-i$，则 $\bar{z}=1+i$，所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，位于第一象限.

3.C　因为 $a=\log_{0.9}0.4>\log_{0.9}0.9=1$，$0<b=0.9^{0.1}<0.9^0=1$，$c=\log_4 0.9<\log_4 1=0$，所以 $c<b<a$.

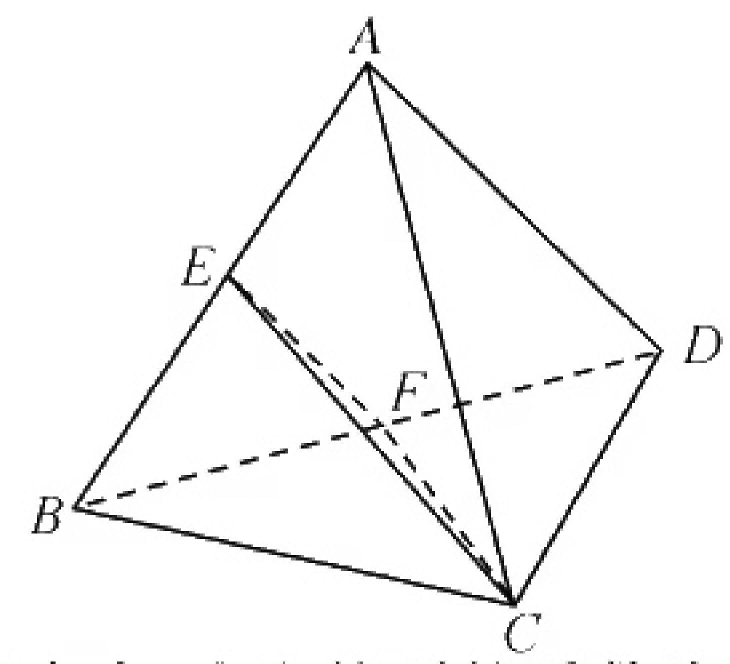
4.C　甲、乙、丙 3 名志愿者参加 2022 年杭州亚运会的 3 个比赛项目的服务工作，有 $3^3=27$ 种安排方法；而乙、丙在同一个比赛项目服务，有 $3^2=9$ 种安排方法，所以乙、丙不在同一个比赛项目服务的概率为 $P=1-\frac{9}{27}=\frac{2}{3}$.

5.A　如图，设正四面体的棱长为 2，取 BD 的中点 F，连结 EF，则 $EF/\!/AD$，

所以 $\angle CEF$ 或其补角为直线 CE 与直线 AD 所成的角，

易知 $EF=1$，$CE=CF=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle CEF=\frac{EF^2+EC^2-CF^2}{2EF\cdot EC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



6.D　令 $x=y=1$ 得，$(m+1)\cdot 2^5=-32$，解得 $m=-2$，所以 $(-2x+y)(x+y)^5$ 的展开式中含 x^3y^3 的项的系数为 $-2C_5^3+C_5^2=-10$.

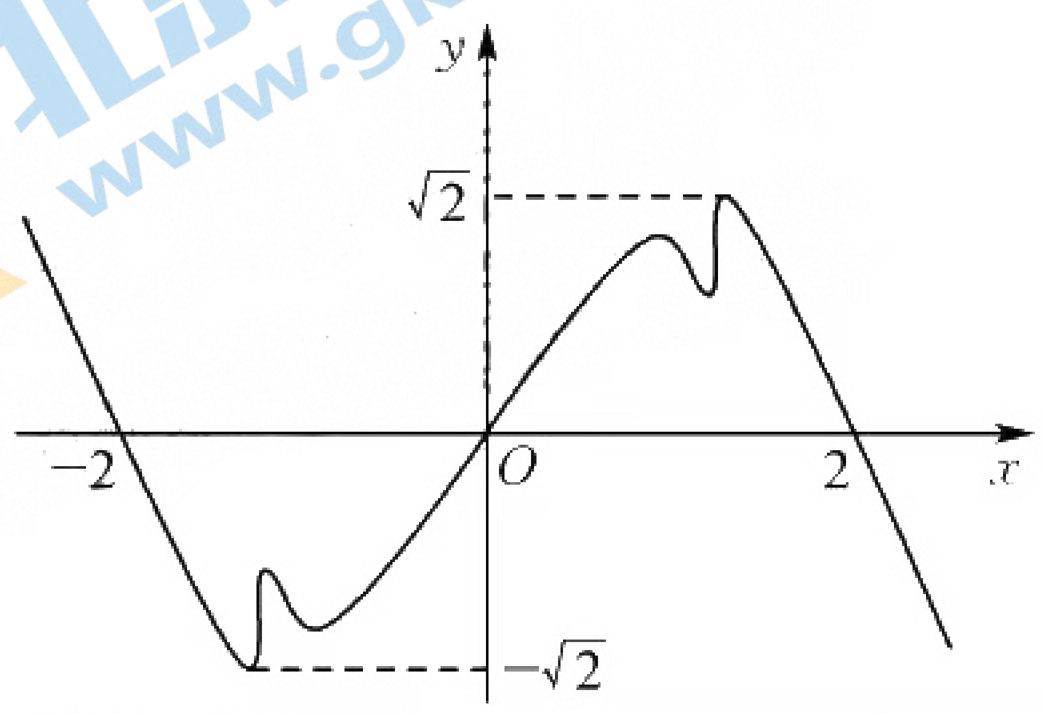
7.C　根据程序框图，$S=1$，$i=1<6$；执行第 1 次循环：$i=1+2=3$，$S=1+2^3=9$；$3<6$，执行第 2 次循环：$i=3+2=5$，$S=9+2^5=41$；$5<6$，执行第 3 次循环：$i=5+2=7$，$S=41+2^7=169$；$7>6$，结束循环，输出 $S=169$. 故选 C.

8.C　根据奇函数的图象特征，作出 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的图象如图所示，

由 $x^2f(x)>2f(x)$，得 $(x^2-2)f(x)>0$，

等价于 $\begin{cases}x^2-2>0,\\ f(x)>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-2<0,\\ f(x)<0,\end{cases}$

解得 $x<-2$，或 $\sqrt{2}<x<2$，或 $-\sqrt{2}<x<0$.



9.A　连结 DE，由题意可知，$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{4}$，所以 $DE/\!/AC$，则 $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BA}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{DF}{FC}=\frac{DE}{AC}=\frac{1}{4}$，所以 $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{20}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{20}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$，则 $3x+y=-1$.

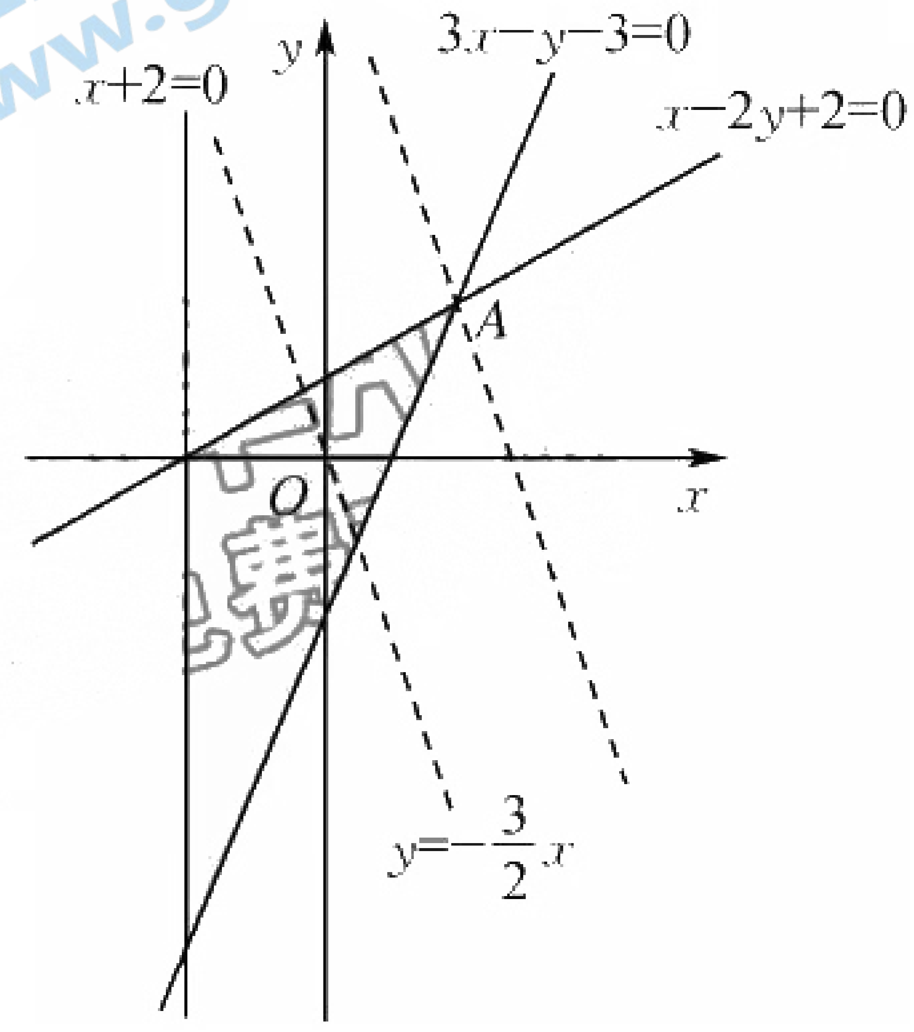
10.D　由题意可知，$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2-a^2=a^2b^2$，又 $b^2=c^2-a^2$，所以 $c^2-2a^2=a^2(c^2-a^2)$，所以 $a^2=\frac{c^2-2a^2}{c^2-a^2}=\frac{e^2-2}{e^2-1}>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，解得 $e>\sqrt{3}$.

11.B　由题意可得 $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}<\frac{4\pi}{9}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\frac{9}{2}<\omega\leqslant\frac{27}{2}$，结合 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\omega=$

$6k+1,k\in\mathbf{Z}$，所以 ω 的最大值为13.

12. A　由 $a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$，又 $a_2-a_1=3$，所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以3为首项，4为公比的等比数列，则 $a_{n+1}-a_n=3\cdot 4^{n-1}$①，由 $a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$ 得，$a_{n+2}-4a_{n+1}=a_{n+1}-4a_n$，又 $a_2-4a_1=-3$，所以数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$是常数列，则 $a_{n+1}-4a_n=a_2-4a_1=-3$②，由①②联立可得 $a_{n+1}=4^n+1$，所以 $b_n=[\log_2 a_{n+1}]=[\log_2(4^n+1)]=2n$（显然 $4^n<4^n+1<2\times 4^n$），$\frac{1000}{b_nb_{n+1}}=\frac{1000}{2n\cdot 2(n+1)}=250\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_{2022}=250\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right)\right]=250\left(1-\frac{1}{2023}\right)$，则$[S_{2022}]=249$.

13. $\frac{7}{5}$　线性约束条件的可行域如图阴影部分所示，作出直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 并平移，数形结合可知，当平移后的直线经过点 $A\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$ 时，z 取得最大值，且 $z_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$.



14. $n-2$（答案不唯一，满足 $d>0,a_3=1$ 即可）　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_2-a_3+a_1=1$ 得，$a_1+2d=1$，由①可知 $d>0$，取 $d=1$，则 $a_1=-1$，所以数列$\{a_n\}$的一个通项公式 $a_n=-1+(n-1)=n-2$.

15. $\frac{32\pi}{3}$　设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，由题意，得 $2\pi r=\pi l$，所以 $l=2r$，则圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r$，由 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times r^2\times\sqrt{3}r=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，解得 $r=\sqrt{2}$，$l=2\sqrt{2}$，$h=\sqrt{6}$，设圆锥的外接球的半径为 R，由球的性质可知，$R^2=(h-R)^2+r^2$，即 $R^2=(\sqrt{6}-R)^2+2$，解得 $R=\frac{4}{\sqrt{6}}$，所以该圆锥的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{32\pi}{3}$.

16. $\sqrt{2}+1$　由题意可知，$A\left(-\frac{p}{2},0\right)$，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$. 设切点 B 的坐标为$(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，又 $y=\sqrt{2px}$，则 $y'=\sqrt{\frac{p}{2x}}$，所以 AB 的方程为 $y-\sqrt{2px_0}=\sqrt{\frac{p}{2x_0}}(x-x_0)$，将 $A\left(-\frac{p}{2},0\right)$ 代入得，$-\sqrt{2px_0}=\sqrt{\frac{p}{2x_0}}\left(-\frac{p}{2}-x_0\right)$，解得 $x_0=\frac{p}{2}$，则 $y_0=p$，即 $B\left(\frac{p}{2},p\right)$. 由 $DF/\!/AB$，当 D 在第四象限内时，设$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DF}(m>0)$，$D(x_1,-y_1)(y_1>0)$，又$\overrightarrow{AB}=(p,p)$，$\overrightarrow{DF}=\left(\frac{p}{2}-x_1,y_1\right)$，则$\begin{cases}p=m\left(\frac{p}{2}-x_1\right),\\ p=my_1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\frac{(m-2)p}{2m},\\ y_1=\frac{p}{m},\end{cases}$将点 D 代入 $C:y^2=2px$ 得 $m^2-2m-1=0$，解得 $m=\sqrt{2}+1$（负值舍去），故$\frac{|AB|}{|DF|}=\sqrt{2}+1$.

17. 解：(1)由条件与诱导公式可知，$\sin C=2\sin B$.

由正弦定理得，$c=2b$. ………………………………………………………… 2分

又△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}\times 2b\times b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，解得 $b=2$（负值舍去）， ……………… 4分

所以 $c=2b=4$，故 $b=2,c=4$. ……………………………………………… 6分

(2)由余弦定理得，$a^2=4+16-2\times 2\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$，解得 $a=2\sqrt{7}$. ………………………… 8分

在△ABC 中，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………… 10分

在$\triangle ABD$中，由正弦定理得，$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{4\times\frac{\sqrt{21}}{14}}{\sqrt{21}}=\dfrac{2}{7}$. ································ 12 分

18. 解：(1)由频率分布直方图可知，男生立定跳远的达标率为 $0.2\times(1.0+0.75+0.50+0.25)=0.5$

因为 $50\%<60\%$，所以该校男生还需加强立定跳远训练. ································ 4 分

(2)因为 ξ 近似服从正态分布 $N(2.25,\sigma^2)$，且 $P(\xi\leqslant 2.45)=0.8$，

所以 $P(\xi\geqslant 2.05)=0.8$， ································ 6 分

由题意可知，$X\sim B\left(3,\dfrac{4}{5}\right)$

$P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{4}{5}\right)^0\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{1}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{4}{5}\right)^1\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{12}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^1=\dfrac{48}{125}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^0=\dfrac{64}{125}$， ································ 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{64}{125}$

则 $E(X)=3\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{5}$. ································ 12 分

19. (1)证明：取 BC 的中点 D，连结 AD，C_1D.

因为$\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $AD\perp BC$.

因为侧面 BCC_1B_1 为菱形，$\angle CBB_1=120°$，所以$\triangle BCC_1$ 为等边三角形，

所以 $C_1D\perp BC$， ································ 2 分

因为 $AD\cap C_1D=D$，AD，$C_1D\subset$平面 AC_1D，所以 $BC\perp$平面 AC_1D，

又 $AC_1\subset$平面 AC_1D，所以 $BC\perp AC_1$， ································ 4 分

又 $BC/\!/B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp AC_1$，所以$\triangle AB_1C_1$ 为直角三角形. ································ 6 分

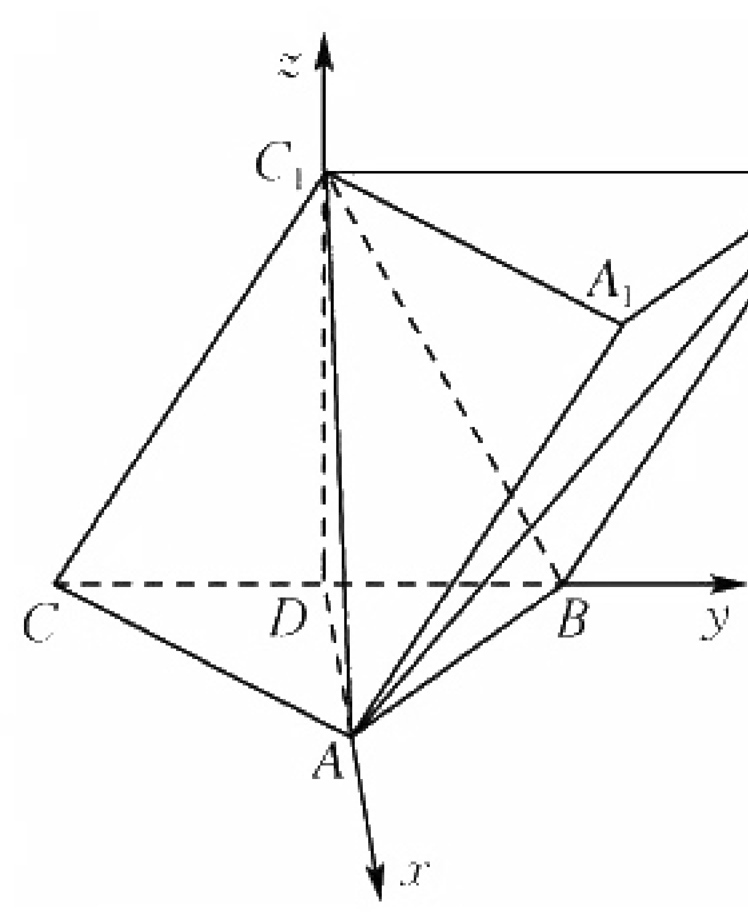
(2)解：由(1)及 $AC_1=\sqrt{6}$，$AB_1=\sqrt{10}$ 可知，$B_1C_1=2$，则

在$\triangle BCC_1$ 中，$C_1D=\sqrt{3}$，同理 $AD=\sqrt{3}$，

又 $AC_1=\sqrt{6}$，所以 $AC_1{}^2=C_1D^2+AD^2$，所以 $AD\perp C_1D$. ································ 8 分

以 D 为原点，直线 DA，DB，DC_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐

标系 $D-xyz$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(0,2,\sqrt{3})$，



所以$\overrightarrow{C_1B}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2,0)$，

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$， ··············· 10 分

设直线 BC_1 与平面 AB_1C_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{C_1B},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{C_1B}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{C_1B}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，即 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数. …………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上为增函数，在 $(\ln a,+\infty)$ 上为减函数.

即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上为增函数，在 $(\ln a,+\infty)$ 上为减函数. …………………………… 4 分

(2)证明：$g(x)=ax^2-2e^x+2\sin x$，则 $g'(x)=2ax-2e^x+2\cos x$，

设 $\varphi(x)=2ax-2e^x+2\cos x$，则 $\varphi'(x)=2a-2e^x-2\sin x$，

易知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=-2e^x$，$y=-2\sin x$ 均为减函数，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数. …………………………… 6 分

①当 $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2a-2e^{-\frac{\pi}{2}}+2\leqslant 0$，即 $a\leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}-1$ 时，则 $\varphi'(x)\leqslant 0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，

又 $\varphi(0)=0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\varphi(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值. …………………………… 8 分

②当 $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2a-2e^{-\frac{\pi}{2}}+2>0$，即 $e^{-\frac{\pi}{2}}-1<a<1$ 时，$\varphi'(0)=2a-2<0$，

又 $\varphi'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$，则 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

又 $\varphi(0)=0$，所以当 $x\in(x_0,0)$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\varphi(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

综上可知，当 $a<1$ 时，函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值. …………………………… 12 分

22. 解：(1)由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\frac{t}{2}+6,\\ y=-\frac{t}{3}-2\end{cases}$ 消去参数 t，

得直线 l 的普通方程 $2x+3y-6=0$； …………………………… 2 分

由 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$，得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=4$，则 $x^2+4y^2=4$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………… 5 分

(2)由(1)可知 $A(3,0)$，$B(0,2)$，设 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，

则点 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为

$d=\frac{|4\cos\theta+3\sin\theta-6|}{\sqrt{13}}=\frac{6-5\sin(\theta+\varphi)}{\sqrt{13}}$,其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$, …………………………………………………… 7 分

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时,$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{13}}$,

又 $|AB|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$,

所以△ABP 的面积的最小值为 $(S_{\triangle ABP})_{\min}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{\min}=\frac{1}{2}$. …………………………………………… 10 分

23.(1)解:不等式 $f(x)\geqslant -m$,即 $f(x)+m\geqslant 0$.

而 $f(x)+m=|x-2|-|x+1|+m=\begin{cases}-3+m, x\geqslant 2,\\ -2x+1+m, -1<x<2,\\ 3+m, x\leqslant -1.\end{cases}$

又由 $-2x+1+m\geqslant 0$,得 $x\leqslant\frac{m+1}{2}$.

因为不等式 $f(x)+m\geqslant 0$ 的解集为 $(-\infty,1]$. 所以 $\begin{cases}-3+m<0,\\ \frac{1+m}{2}=1,\\ 3+m\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $m=1$. …………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)证法 1:由(1)可知,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,

要证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}ab$,需证 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{ab}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,即证 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$,所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{1}{2}$,当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$,即 $a=b=2$ 时取得等号;

又 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\leqslant 2$,所以 $\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\leqslant\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$,即 $a=b=2$ 时取得等号;

所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}ab$. ……………………………………………… 10 分

证法 2:由(1)可知,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,即 $a+b=ab$.

因为 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$,所以 $\sqrt{ab}\geqslant 2$,当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$,即 $a=b=2$ 时取得等号.

因此 $\frac{\sqrt{2}}{2}ab=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{ab}=\sqrt{2ab}=\sqrt{(a+b)+(a+b)}\geqslant\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}ab$. ……………………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。