工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市 2021 级高中毕业班摸底测试

数学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1 至 3 页,第Ⅱ卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$,$B=\{-2,-1,0,1,2\}$,则 $A\cap B=$

(A) $\{-2,0,1\}$　(B) $\{-1,0,1,2\}$　(C) $\{0,1\}$　(D) $\{1,2\}$

2. 命题“ $\exists m_0\in\mathbf{N}$, $\sqrt{m_0^2+1}\in\mathbf{N}$ ”的否定为

(A) $\forall m\notin\mathbf{N},\sqrt{m^2+1}\in\mathbf{N}$　(B) $\forall m\in\mathbf{N},\sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$

(C) $\exists m_0\in\mathbf{N},\sqrt{m_0^2+1}\notin\mathbf{N}$　(D) $\exists m_0\notin\mathbf{N},\sqrt{m_0^2+1}\in\mathbf{N}$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的渐近线方程为

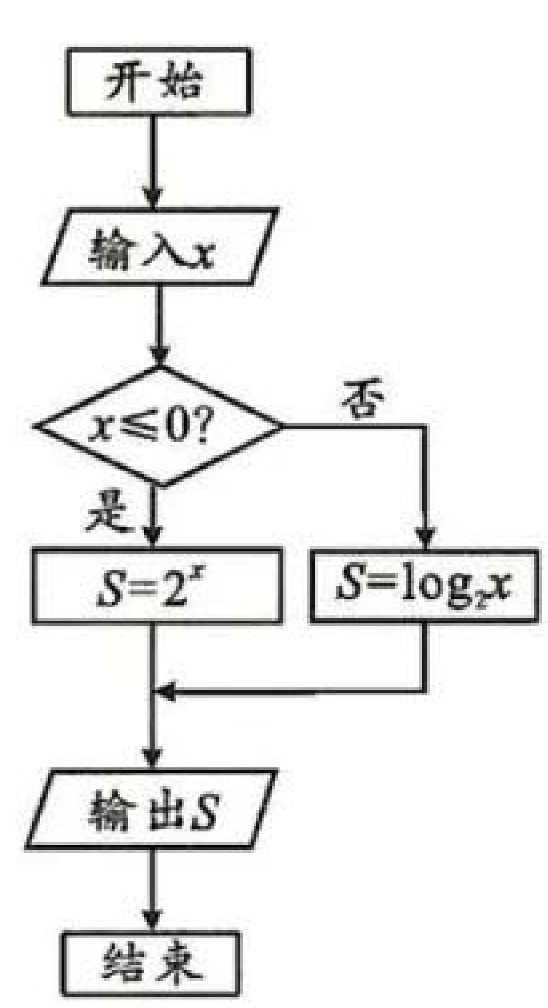
(A) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　(B) $y=\pm\frac{1}{2}x$

(C) $y=\pm\sqrt{2}x$　(D) $y=\pm 2x$

4. 执行如图所示的程序框图,若输出 S 的值为 4,则输入的 x 的值为

(A) -4　(B) -2

(C) 2　(D) 16



5. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$,则 $3x+2y$ 的最大值为

(A) 0　(B) 6　(C) 7　(D) 9

6. 全国文明典范城市是以全国文明城市为基础的文明城市范例，是城市治理“桂冠上的明珠”. 为争创全国文明典范城市，某城市特邀请甲、乙两组评委分别从公共服务、文化建设、社会治理等 10 个不同维度对城市建设进行评分，每个维度满分为 10 分. 现将两组评委的评分制成如下的茎叶图，其中茎叶图中茎部分是得分的个位数，叶部分是得分的小数，则下列结论中正确的是

甲		乙
9 8 6 5	7	5 6 8 8
6 5 3 3 1 0	8	0 1 2 3 5
	9	8

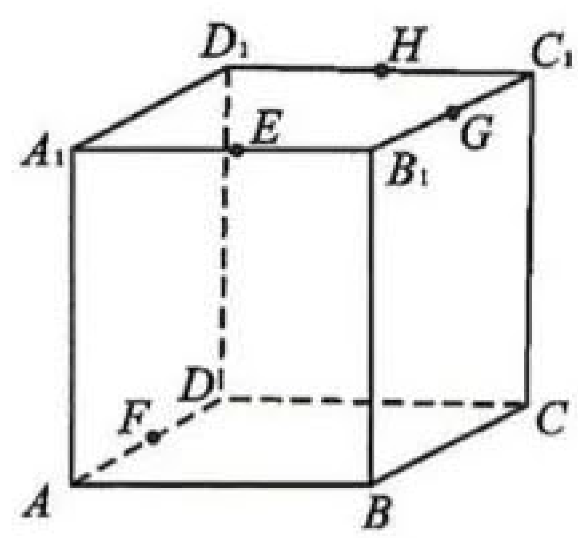
(A) 甲组评分的平均数小于乙组评分的平均数

(B) 甲、乙两组评分的中位数不相同

(C) 甲组评分的极差大于乙组评分的极差

(D) 甲组评分的众数小于乙组评分的众数

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E,F,G,H 分别是 A_1B_1,AD,B_1C_1,C_1D_1 的中点，则下列结论中错误的是



(A) C,G,A_1,F 四点共面

(B) 直线 EF // 平面 BDD_1B_1

(C) 平面 HCG // 平面 BDD_1B_1

(D) 直线 EF 和 HG 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$

8. 函数 $f(x)=e^x-2023|x-2|$ 的零点个数为

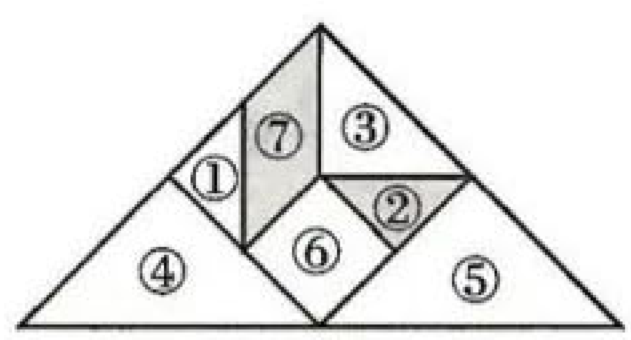
(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

9. 已知直线 $l: mx+y-m=0(m\in\mathbf{R})$ 和圆 $C: x^2+y^2-2x+4y+1=0$，则“$m=0$”是“直线 l 与圆 C 相切”的

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

10. 七巧板又称七巧图，智慧板，是一种古老的中国传统智力玩具. 据清代陆以湉《冷庐杂识》说：“宋黄伯思宴几图，以方几七，长段相参，衍为二十五体，变为六十八名. 明严澂蝶几图，则又变通其制，以勾股之形，作三角相错形，如蝶翅. 其式三，其制六，其数十有三，其变化之式，凡一百有余. 近又有七巧图，其式五，其数七，其变化之式多至千余. 体物肖形，随手变幻，盖游戏之具，足以排闷破寂，故世俗皆喜为之.” 如图是一个用七巧板拼成的三角形(其中①②为两块全等的小型等腰直角三角形，③为一块中型等腰直角三角形，④⑤为两块全等的大型等腰直角三角形，⑥为一块正方形，⑦为一块平行四边形). 现从该三角形中任取一点，则此点取自阴影部分的概率为



(A) $\frac{1}{8}$　　(B) $\frac{3}{16}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{3}{8}$

11. 记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时恒有 $f(x)\cos x+f'(x)\sin x>0$ 成立，则

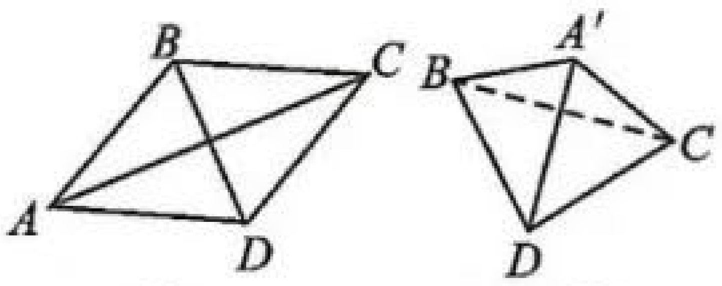
(A) $f(-\frac{\pi}{6})>\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{4})$　　(B) $f(\frac{\pi}{6})>-\sqrt{3}f(-\frac{\pi}{3})$

(C) $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{3})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$　　(D) $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{4})>-\sqrt{3}f(\frac{\pi}{3})$

12. 如图①，已知四边形 $ABCD$ 所有边长均为 2，对角线 $AC=2\sqrt{3}$. 现以 BD 为折痕将四边形 $ABCD$ 折起为四面体 $A'-BCD$，使得 $A'D\perp BC$，如图②. 则四面体 $A'-BCD$ 的外接球的表面积为

(A) $\frac{2}{3}\pi$　　(B) $\frac{8}{3}\pi$

(C) 6π　　(D) $\frac{32}{3}\pi$



图①　　图②

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知复数 $z=\frac{1-i}{i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$______.

14. 第 31 届世界大学生夏季运动会将于 2023 年 7 月 28 日—8 月 8 日在成都举行，比赛项目包括 15 个必选项目和武术、赛艇、射击 3 个自选项目，共 18 个大项，269 个小项. 小张、小王、小李三位大学生在谈论自己是否会武术、赛艇、射击 3 个自选项目时，小张说：我和小王都不会赛艇；小王说：我会的自选项目比小张多一个；小李说：三个自选项目中我们都会的项目只有一项，但我不会射击. 假如他们三人都说的是真话，则由此可判断小张会的自选项目是______（填写具体项目名称）.

15. 已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上的动点，F 为抛物线的焦点，点 $Q(3,\sqrt{5})$，则△PQF 周长的最小值为______.

16. 一条直线与函数 $y=\ln x$ 和 $y=e^x$ 的图象分别相切于点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_2(x_1-1)}{x_1+1}$ 的值为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 已知 $f(x)=x^3+ax+10$，$f'(2)=0$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[-3,4]$ 的值域.

18.（本小题满分 12 分）

某种产品的价格 x（单位：万元/吨）与需求量 y（单位：吨）之间的对应数据如下表所示：

x	12	11	10	9	8
y	5	6	8	10	11

（Ⅰ）已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程；

（Ⅱ）请预测当该产品定价为 6 万元时需求量能否超过 15 吨？并说明理由．

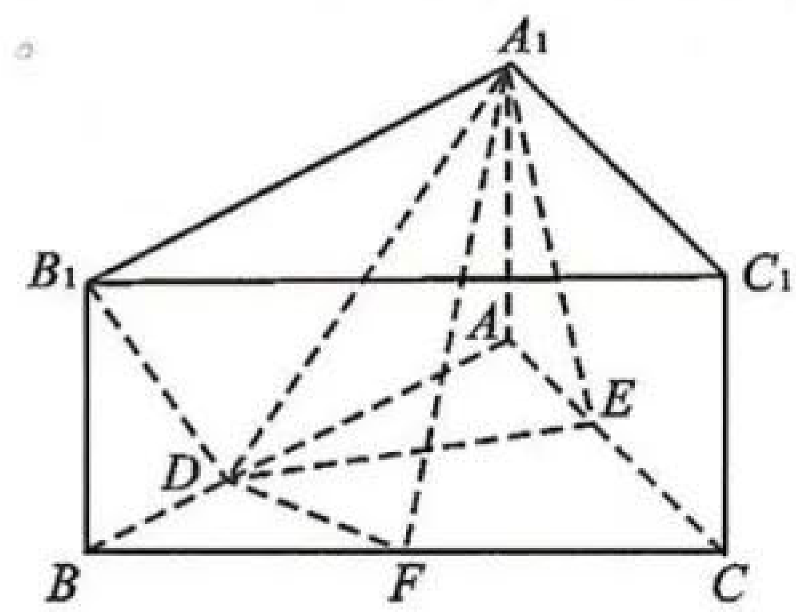
参考公式：$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$．

19.（本小题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB\perp AC$，$AB=AC=4$，$AA_1=2$．D，E 分别为棱 AB，AC 上的动点，F 为 BC 中点，且 $BD=AE$．

（Ⅰ）求三棱锥 $A-A_1DE$ 体积的最大值；

（Ⅱ）当三棱锥 $A-A_1DE$ 的体积最大时，求证：$B_1D\perp$ 平面 A_1DF．



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，椭圆 E 上的点到其左、右焦点的距离之和为 4．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设过左焦点 F 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A，B 两点，M 为 AB 的中点，O 为坐标原点．若椭圆 E 上存在点 N 满足 $\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OM}$，求四边形 $AOBN$ 的面积．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-a$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x>1$ 时，若 $f(x)>-2$ 恒成立，求整数 a 的最大值．

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2t,\\y=t^2\end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=5$．设曲线 C_1 与曲线 C_2 相交于 A，B 两点．

（Ⅰ）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（Ⅱ）已知点 $P(2,3)$，求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值．

成都市 2021 级高中毕业班摸底测试

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1.C; 2.B; 3.A; 4.D; 5.D; 6.A; 7.C; 8.D; 9.C; 10.B; 11.B; 12.C.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. 武术; 15. 7; 16. -1.

三、解答题:(共 70 分)

17. **解**:(Ⅰ) $f'(x)=3x^2+a$. ……2 分

$\because f'(2)=0$,

$\therefore 3\times 2^2+a=0$.

解得 $a=-12$. ……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$.

由 $f'(x)>0$,解得 $x<-2$ 或 $x>2$;由 $f'(x)<0$,解得 $-2<x<2$. ……6 分

$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $[-3,-2]$,$[2,4]$ 单调递增;在 $[-2,2]$ 单调递减. ……8 分

又 $f(-3)=19$,$f(-2)=26$,$f(2)=-6$,$f(4)=26$, ……10 分

$\therefore f_{\min}(x)=f(2)=-6$,$f_{\max}(x)=f(-2)=f(4)=26$. ……11 分

$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $[-3,4]$ 的值域为 $[-6,26]$. ……12 分

18. **解**:(Ⅰ)由题意得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(12+11+10+9+8)=10$, ……1 分

$\bar{y}=\frac{1}{5}(5+6+8+10+11)=8$. ……2 分

$\because \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-16$,$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$. ……4 分

$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=-1.6$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=24$. ……6 分

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-1.6x+24$. ……8 分

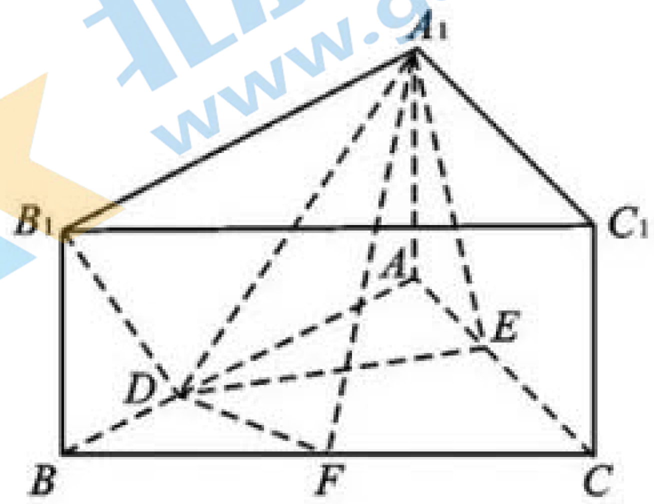
(Ⅱ)当 $x=6$ 时,$\hat{y}=14.4<15$. ……10 分

$\therefore$当该产品定价为 6 万元时需求量不超过 15 吨. ……12 分

19. **解:**(Ⅰ)由题意设 $BD=AE=x$,则 $AD=AB-BD=4-x$.

$\therefore V_{A-A_1DE}=V_{A_1-ADE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(4-x)\times 2$. ……3 分

$\because x(4-x)\leqslant\left(\frac{x+4-x}{2}\right)^2=4$(当且仅当 $x=2$ 时取等号), ……4 分



$\therefore V_{A-A_1DE}\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2=\frac{4}{3}$.

$\therefore$三棱锥 $A-A_1DE$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知当三棱锥 $A-A_1DE$ 体积取得最大值时,D,E 分别为棱 AB,AC 的中点. ……6 分

$\because F$ 为 BC 中点,

$\therefore DF\parallel AC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,由 $A_1A\perp$ 平面 ABC,得 $A_1A\perp AC$.

$\because A_1A\perp AC$,$BA\perp AC$,$AB\cap A_1A=A$,A_1A,$AB\subset$平面 A_1ABB_1,

$\therefore AC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\therefore DF\perp$ 平面 ABB_1A_1.

$\therefore DF\perp B_1D$. ……8 分

由 $AA_1\perp AB$,在 $\text{Rt}\triangle A_1AD$ 中,$A_1D=\sqrt{AA_1{}^2+AD^2}=2\sqrt{2}$. ……9 分

同理在 $\text{Rt}\triangle B_1BD$ 中,$B_1D=2\sqrt{2}$. ……10 分

又 $A_1B_1^2=16=A_1D^2+B_1D^2$,

$\therefore B_1D\perp A_1D$. ……11 分

又 $DF\cap A_1D=D$,DF,$A_1D\subset$平面 A_1DF ,

$\therefore B_1D\perp$ 平面 A_1DF . ……12 分

20. **解:**(Ⅰ)$\because$ 椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$,且椭圆 E 上的点到其左、右焦点距离之和为 4,

$\therefore\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ 且 $2a=4$. 解得 $a=2$,$c=1$. ……2 分

$\therefore a^2=4$,$b^2=a^2-c^2=3$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意知直线 l 的斜率为 0 时显然不成立. ……5 分

设直线 l 的方程为 $x=my-1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} x = my - 1 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2 - 6my - 9 = 0$.

显然 $\Delta = 144(m^2+1) > 0$.

则 $y_1 + y_2 = \dfrac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2 = \dfrac{-9}{3m^2+4}$. ……6 分

$\therefore \dfrac{y_1+y_2}{2} = \dfrac{3m}{3m^2+4}, \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{my_1 - 1 + my_2 - 1}{2} = \dfrac{-4}{3m^2+4}$.

由 M 为 AB 的中点，得 $M(\dfrac{-4}{3m^2+4}, \dfrac{3m}{3m^2+4})$.

由 $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM}$，得 $N(\dfrac{-12}{3m^2+4}, \dfrac{9m}{3m^2+4})$. ……8 分

又点 N 在椭圆 E 上，则 $\dfrac{(\dfrac{-12}{3m^2+4})^2}{4} + \dfrac{(\dfrac{9m}{3m^2+4})^2}{3} = 1$.

解得 $m^2 = \dfrac{5}{3}$.

$\therefore S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}|OF|\,|y_1 - y_2| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \dfrac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4} = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

……10 分

$\because \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM}$，

$\therefore$ 四边形 $AOBN$ 的面积 $S_{AOBN} = 3S_{\triangle AOB} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ)当 $a=1$ 时，函数 $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} (x > 0)$. ……2 分

由 $f'(x) > 0$ 解得 $x > 1$；由 $f'(x) < 0$ 解得 $0 < x < 1$.

$\therefore$函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$. ……4 分

(Ⅱ)由题意当 $x > 1$ 时，$f(x) > -2$，即 $a(1 - \dfrac{1}{x}) < \ln x + 2$.

整理得 $a < \dfrac{x\ln x + 2x}{x-1}$.

令函数 $g(x) = \dfrac{x\ln x + 2x}{x-1} (x > 1)$. ……6 分

则 $g'(x) = \dfrac{x - \ln x - 3}{(x-1)^2} (x > 1)$.

令 $h(x) = x - \ln x - 3 (x > 1)$. 则 $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增. ……8 分

又 $h(4)=1-\ln 4<0, h(5)=2-\ln 5>0$，

$\therefore \exists x_0 \in (4,5)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $\ln x_0=x_0-3$.

$\therefore x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0$；$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增， ……10 分

则 $g_{\min}(x)=g(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+2x_0}{x_0-1}=\dfrac{x_0(x_0-3)+2x_0}{x_0-1}=x_0$.

由 $a<g(x)$ 恒成立，则 $a<g_{\min}(x)=g(x_0)=x_0\in(4,5)$. ……11 分

$\therefore$ 整数 a 的最大值为 4. ……12 分

22. **解**：（Ⅰ）由曲线 C_1 的参数方程消去参数 t，得曲线 C_1 的的普通方程为 $x^2=4y$.

……2 分

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

化简得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y-5=0$. ……4 分

（Ⅱ）由题意得曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$ （m 为参数）. ……6 分

将其代入 $x^2=4y$，得 $m^2-8\sqrt{2}m-16=0$. ……7 分

$\Delta=(8\sqrt{2})^2+64=192>0$.

设 A,B 两点对应的参数分别为 m_1,m_2.

则 $m_1+m_2=8\sqrt{2}, m_1m_2=-16$. ……8 分

则 m_1,m_2 为一正一负，

$$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|m_1|}+\frac{1}{|m_2|}=\frac{|m_1|+|m_2|}{|m_1||m_2|}=\frac{|m_1-m_2|}{|m_1||m_2|}$$

$$=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|m_1m_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ……10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。