姓名________ 座位号______ ________________ —

（在此卷上答题无效）

数　学

本试卷共4页，19题。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2\leqslant 1\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{0\}$　　D. -1

2. 已知复数 z 满足 $iz=2-i$，其中 i 为虚数单位，则 $\dfrac{z}{2+i}=$

A. $-\dfrac{4+3i}{5}$　　B. $\dfrac{4+3i}{5}$　　C. $-\dfrac{3+4i}{5}$　　D. $\dfrac{3+4i}{5}$

3. $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的常数项是

A. 160　　B. -160　　C. 80　　D. -80

4. 已知火箭在 t 时刻的速度为 $V(t)$（单位：千米/秒），质量为 $m(t)$（单位：千克），满足 $V(t)=V_0+u\ln\dfrac{m_0}{m(t)}$（$u$ 为常数），V_0、m_0 分别为火箭初始速度和质量。假设一小型火箭初始质量 $m_0=1000$ 千克，其中包含燃料质量为500千克，初始速度为 $V_0=0$，经过 t_1 秒后的速度 $V(t_1)=2$ 千米/秒，此时火箭质量 $m(t_1)=800$ 千克，当火箭燃料耗尽时的速度大约为（$\ln2\approx0.69$，$\ln5\approx1.61$）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 过点 $A(1,2)$，F 为 C 的焦点，点 P 为 C 上一点，O 为坐标原点，则

A. C 的准线方程为 $x=-2$

B. $\triangle AFO$ 的面积为1

C. 不存在点 P，使得点 P 到 C 的焦点的距离为2

D. 存在点 P，使得 $\triangle POF$ 为等边三角形

6. 已知在四边形 $ABCD$ 中，$AC=2BC=2$，$\angle ACB=\angle ACD=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$，则 BD 的长为

A. $\dfrac{\sqrt3}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt3}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{21-2\sqrt3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{21-6\sqrt3}}{3}$

7. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 P,离心率为 $\frac{1}{2}$,过其左焦点倾斜角为 $30°$ 的直线 l 交椭圆 E 于 A,B 两点,若 $\triangle PAB$ 的周长为 16,则 E 的方程为

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　　C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \\ 2(x-3)^2-1, x\geq 2,\end{cases}$ 若方程 $f(f(x))=\frac{1}{2}$ 的实根个数为

A. 4　　B. 8　　C. 10　　D. 12

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,选对但不全的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$,满足 $a^x=2, a^y=8$,则

A. 若 $a=2$,则 $x+y=4$　　B. 若 $x+y=1$,则 $a=16$

C. 若 $a>2$,则 $x+y<4$　　D. 若 $x+y<1$,则 $a>16$

10. 已知 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos\omega x, \omega>0$,若函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称,且函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调,则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　B. $f(\pi)=1$

C. $f\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)$ 为偶函数　　D. $f(x)\leq f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n,且 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$,若 $a_1=a_2\neq 0$,则

A. $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是等比数列　　B. $\{a_{n+2}-a_n\}$ 是等比数列

C. $\{S_{n+1}-2S_n\}$ 是等差数列　　D. $\{a_{2n+1}-S_{2n}\}$ 是等差数列

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 已知锐角 α 满足 $3\sin\alpha+4\cos\alpha=4$,则 $\tan\frac{\alpha}{2}=$______.

13. 将甲,乙,丙三名志愿者分配到 A,B,C 三个社区服务,每人分配到一个社区且每个社区至多分配一人,则在乙分配到 B 社区的条件下,甲分配到 A 社区的概率为______

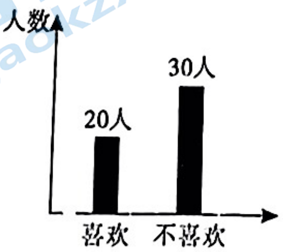
14. 将两个球体封闭在一个正方体容器内,设正方体棱长为 1,则两个球体体积之和的最大值为______

四、解答题:共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

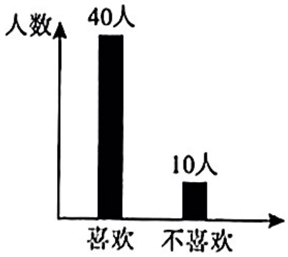
15. (13 分)

据统计,截止 2023 年十月底,中国网络购物用户规模近 8 亿人. 据统计 M 社区 100 户居民的网上购物情况如下图表所示:

年龄超过45岁居民统计表



年龄不超过45岁居民统计表



(1)是否有 99.9%的把握认为 M 社区的居民是否喜欢网上购物与年龄有关?

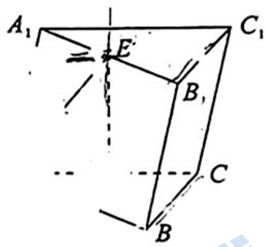
(2)用频率估计概率,现从 M 社区居民中随机抽取 20 位,记其中喜欢网上购物的居民人数为 X, $P(X=k)$ 表示 20 位居民中有 K 位居民喜欢网上购物的概率,当 $P(X=k)$ 取得最大值时,求 k 的值.

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16.(15 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AC\perp BC$,$AC=BC=AA_1=2$,E,F 分别为 A_1B_1,AC 的中点,$EF=\sqrt{3}$.



(1)求证:$AE\perp BC$;

(2)若 $AE=2$,求二面角 $C-AA_1-B$ 的正弦值.

17.(15 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$,点 $P(3,4)$ 在 C 上.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)直线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B,若直线 PA,PB 的斜率互为倒数,证明:直线 l 过定点.

18. (17 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+a)$，直线 $l:y=x$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切.

(1)求实数 a 的值;

(2)若函数 $F(x)=\dfrac{me^x}{x+1}+f(x)-x$ 有三个极值点 x_1,x_2,x_3，求实数 m 的取值范围.

19. (17 分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n\geq 0$，记 $A_n=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B_n=\min\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$，$d_n=A_n-B_n$.

(1)若 $\{a_n\}$ 为 2,0,2,4,2,0,2,4,…，是一个周期为 4 的数列（即 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+4}=a_n$），直接写出 d_1，d_2，d_3，d_4 的值;

(2)若 $\{a_n\}$ 为周期数列，证明：$\exists n_0\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n>n_0$ 时，d_n 是常数;

(3)设 d 是非负整数，证明：$d_n=-d(n=1,2,3\cdots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列.