北京市第一六一中学 2023—2024 学年第一学期阶段测试

高二数学答案

一、选择题：本大题共 12 道小题，每小题 4 分，共 48 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求. 把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	D	A	B	D	C	D	B	C	B	C

二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

13	14	15	16	17	18
$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	0，B,D,A_1或B_1D_1C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	②④

三、解答题：本大题共 5 小题，共 72 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为$\vec{b}-\vec{c}=(0,-\sqrt{3},0)$

所以 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0-6+0=-6$

（Ⅱ）$\cos<\vec{b},\vec{c}>=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{1+0+4}{\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$

（Ⅲ）因为$\vec{a}-\vec{b}=(m-1,2\sqrt{3},4)$

所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(m-1)^2+12+16}$

当$m=1$时，$|\vec{a}-\vec{b}|_{min}=2\sqrt{7}$

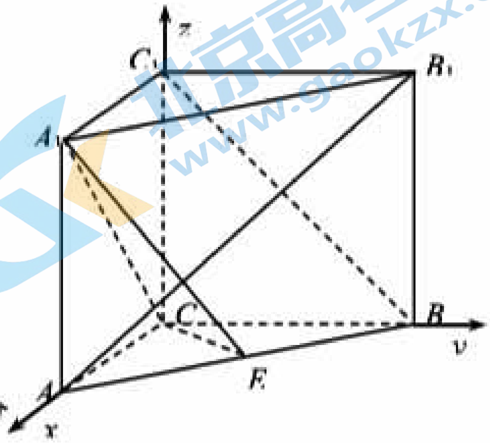
20.（本小题满分 14 分）

证明:（Ⅰ）因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

所以 $CC_1\perp AC, CC_1\perp BC$，

又 $\angle ACB=90^\circ$，即 $AC\perp BC$

如图所示，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，



$A(2,0,0)$，$B_1(0,2,2)$，$E(1,1,0)$，$A_1(2,0,2)$，

…………2 分

则 $\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$，　$\overrightarrow{B_1E}=(1,-1,-2)$ …………4 分

设直线 A_1C 与直线 B_1E 所成角为 α

所以 $\cos\alpha=|\cos<\overrightarrow{B_1E},\overrightarrow{CA_1}>|=\left|\frac{\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{CA_1}}{|\overrightarrow{B_1E}|\cdot|\overrightarrow{CA_1}|}\right|=\left|\frac{2+0-4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{6}$

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$

所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0$，所以 $AB_1\perp CA_1$，

又因为 $\overrightarrow{CE}=(1,1,0)$，则 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，所以 $AB_1\perp CE$

又因为 $A_1C\cap CE=C$，且均在面 A_1CE 内

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1CE．

则 $\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,2)$ 是平面 A_1CE 的法向量，

设直线 A_1C_1 与平面 A_1CE 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{C_1A_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{C_1A_1}||\overrightarrow{AB_1}|}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

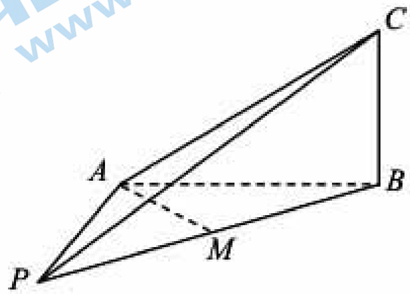
21.（本小题满分 15 分）

解：(Ⅰ)因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PA\perp BC$.

又因为 $BC\perp AB$，$PA\cap AB=A$，且均在面PAB内

所以 $BC\perp$ 平面 PAB.



因为AM ⊂ 平面 PAB

所以 $AM\perp BC$.

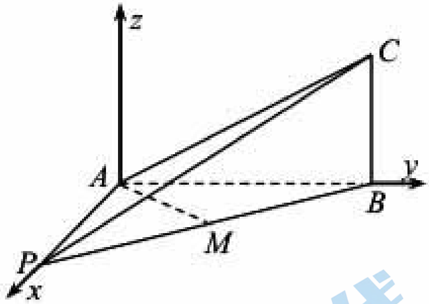
因为 $PA=AB$，M 为 PB 的中点，

所以 $AM\perp PB$.

又因为AB ∩ BC = B，且均在面PBC内

所以 $AM\perp$ 平面 PBC.

(Ⅱ)如图，在平面 ABC 内，作 $Az\,//\,BC$，



则Az ⊥平面 PAB.

所以 AP,AB,AZ 两两互相垂直，

建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0,0,0),P(2,0,0),B(0,2,0),C(0,2,1),M(1,1,0)$.

$\overrightarrow{AP}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$.

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=0,\\ 2y+z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=-2$. 所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-2)$.

由(Ⅰ)可知 $\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$ 为平面 BPC 的法向量，

如图二面角 $A-PC-B$ 的平面角 α 为锐角，

则 $\cos\alpha=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}\right|=\left|\dfrac{0+1+0}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

.

22.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB=AD$．

又因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$， E 为 AD 的中点，所以 $BE\perp AD$．

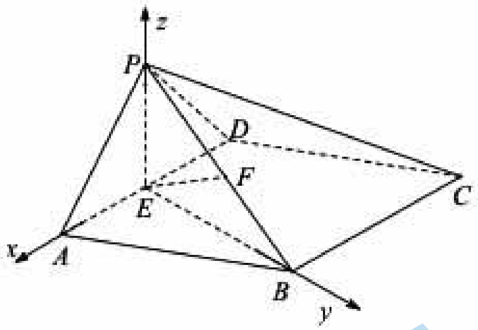
又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$ 于AD，且BE $\subset$ 平面ABCD

所以 $BE\perp$ 平面 PAD．

因为 $PA\subset$ 平面 PAD，

所以 $BE\perp PA$．

（Ⅱ）当点 F 是线段 PB 的中点时，$\frac{PF}{PB}=\frac{1}{2}$，$EF//$ 平面 PCD．



理由如下：

连结 PE． 因为 $PA=PD$， E 为 AD 的中点，

所以 $PE\perp AD$．

由（Ⅰ）可知 $BE\perp$ 平面 PAD，所以 $BE\perp AD$，$PE\perp BE$

．　设 $AD=2a$， 则 $PE=a$．

如图，建立空间直角坐标系 $E-xyz$．

所以$P(0,0,a),D(-a,0,0),C(-2a,\sqrt{3}a,0)$

则 $\overrightarrow{DC}=(-a,\sqrt{3}a,0)$， $\overrightarrow{DP}=(a,0,a)$．

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-ax+\sqrt{3}ay=0,\\ ax+az=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=\sqrt{3}y,\\ x=-z.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$， 则 $y=1$， $z=-\sqrt{3}$． 于是 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$．

设 $\frac{PF}{PB}=\lambda(\lambda\in[0,1])$， 则 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$．

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{EP}+\lambda\overrightarrow{PB}=(0,0,a)+\lambda(0,\sqrt{3}a,-a)=(0,\sqrt{3}\lambda a,a-\lambda a)$

由题 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\lambda a-\sqrt{3}(a-\lambda a)=0$， 得 $\lambda=\frac{1}{2}$．

所以当点 F 是线段 PB 的中点时， $EF//$ 平面 PCD， 且 $\frac{PF}{PB}=\frac{1}{2}$．

23.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）方程 $x_i - x_j = 2$ 的解有：$(x_i, x_j) = (2013, 2011), (2019, 2017)$.

（ⅱ）以下规定两数的差均为正，则：

列出集合 X 的从小到大 8 个数中相邻两数的差：1，3，2，4，2，3，1；

中间隔一数的两数差（即上一列差数中相邻两数和）：4，5，6，6，5，4；

中间相隔二数的两数差：6，9，8，9，6；

中间相隔三数的两数差：10，11，11，10；

中间相隔四数的两数差：12，14，12；

中间相隔五数的两数差：15，15；

中间相隔六数的两数差：16

这 28 个差数中，只有 4 出现 3 次、6 出现 4 次，其余都不超过 2 次，

所以 k 的可能取值有 4，6.

（Ⅱ）证明：不妨设 $2007 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_8 \le 2023$，

记 $a_i = x_{i+1} - x_i (i = 1, 2, \cdots, 7)$，$b_i = x_{i+2} - x_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$，共 13 个差数.

假设不存在满足条件的 k，则这 13 个数中至多两个 1、两个 2、两个 3、两个 4、两个 5、两个 6，

从而 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_7) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_6) \ge 2(1 + 2 + \cdots + 6) + 7 = 49$ ①.

又 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_7) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_6) = (x_8 - x_1) + (x_8 + x_7 - x_2 - x_1)$

$= 2(x_8 - x_1) + (x_7 - x_2) \le 2 \times 16 + 14 = 46$，这与①矛盾！

所以结论成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！