2022 北京昌平高二（上）期末

数　学

2022.01

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知直线 $l:\sqrt{3}x-y-4=0$，则直线 l 的倾斜角为

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

（2）已知 $A(2,-3,-1),\ B(-6,5,3)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$

（A）$4\sqrt{6}$　　（B）$2\sqrt{33}$　　（C）12　　（D）14

（3）在 $(2+x)^6$ 的展开式中二项式系数最大的项是

（A）第 3 项和第 4 项　　（B）第 4 项和第 5 项　　（C）第 3 项　　（D）第 4 项

（4）设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点为 F_1,F_2，过点 F_1 的直线交椭圆于 A,B 两点，如果 $|AB|=8$，那么 $|AF_2|+|BF_2|$ 的值为（）

（A）2　　（B）10　　（C）12　　（D）14

（5）已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{D_1B}=$

（A）$-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　（B）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　（C）$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　（D）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（6）设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“直线 $l_1:ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+(a+1)y+4=0$ 平行”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）第 24 届冬季奥林匹克运动会，即 2022 年北京冬季奥运会，计划于 2022 年 2 月 4 日（星期五）开幕，2 月 20 日（星期日）闭幕.北京冬季奥运会设 7 个大项，15 个分项，109 个小项.其中七个大项分别为：滑雪、滑冰、雪车、雪橇、冰球、冰壶、冬季两项（越野滑雪射击比赛）.现组委会将七个大项的门票各一张分给甲、乙、丙三所学校，如果要求一个学校 4 张，一个学校 2 张，一个学校 1 张，则共有不同的分法数为

（A）$A_7^4A_3^2A_1^1$　　（B）$C_7^4C_3^2C_1^1$　　（C）$A_7^1A_6^2A_4^4C_3^3$　　（D）$C_7^4C_3^2C_1^1A_3^3$

（8）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PA 中点，$PA=AD=2AB$，则直线 BE 与 PD 所成角的大小为

（A）$\dfrac{\pi}{12}$　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{7\pi}{12}$

（9）直线 $3x-4y=0$ 与抛物线 $W:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，F 为抛物线 W 的焦点,若 $|AB|=5$，则 ΔABF 的面积为

（A）$\dfrac{3}{8}$　　（B）$\dfrac{27}{32}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{8}{3}$

（10）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 的边长为 2， M 是空间中任意一点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ 的最小值为

（A）$-\dfrac{3}{2}$　　（B）-1　　（C）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}$

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(11) 已知 $\boldsymbol{a}=(x,-2,6)$ 是直线 l_1 的方向向量， $\boldsymbol{b}=(1,y,-3)$ 是直线 l_2 的方向向量，若直线 $l_1//l_2$ ，则 $x+y=$_____。

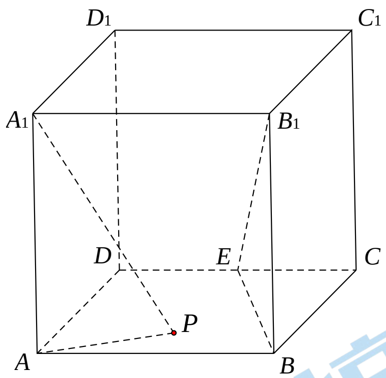
(12) 在 $(x^2+\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式中所有的二项式系数之和为 512，则 $n=$_______；展开式中常数项的值为___________.

(13) 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$ 的渐近线方程为_____；若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是双曲线 C 的右焦点，则 $p=$___ .

(14) 在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,0,0)$ ， $B(0,1,0)$ ， $C(0,0,1)$ ，若点 $P(x,2,1)$ 在平面 ABC 内，则 $x=$_____

（15）已知圆 $O:x^2+y^2=4$ ，直线 l 过点 $(1,1)$ 且与圆 O 交于 A,B 两点，当 ΔAOB 面积最大时，直线 l 的方程为__________

（16）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E 为 CD 的中点，点 P 在正方体的表面上运动，且满足平面 $AA_1P\perp$ 平面 BB_1E .给出下列四个结论：



①△ AA_1P 的面积的最大值为 $\sqrt{5}$ ；

②满足使△ AA_1P 的面积为 2 的点 P 有且只有两个；

③点 P 可以是 CC_1 的中点；

④线段 A_1P 的最大值为 3 .

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题(本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

(17)（本小题 14 分）

已知过点 $P(0,5)$ 的直线 l 被圆 $C:x^2+y^2+4x-12y+24=0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{3}$.

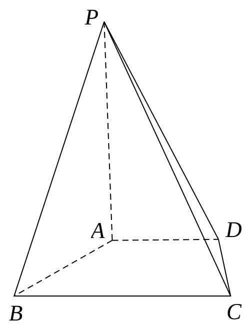
（I）写出圆 C 的标准方程及圆心坐标、半径；

（II）求直线 l 的方程.

(18)（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\perp AD$ ， $AD//BC$ ，

$PA=AB=BC=2AD=2$.



（I） 求证： $AD//$ 平面 PBC ；

（II） 求直线 PB 和平面 PCD 所成角的正弦值；

（III）求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.

(19)（本小题 14 分）

有 7 个人分成两排就座，第一排 3 人，第二排 4 人.

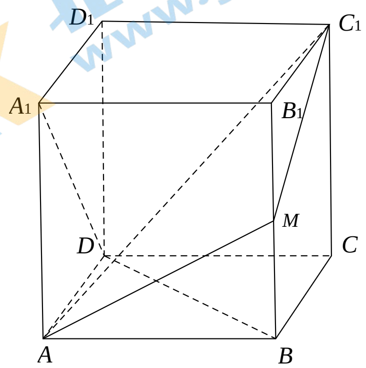
（I）共有多少种不同的坐法?

（II）如果甲和乙都在第二排，共有多少种不同的坐法?

（III）如果甲和乙不能坐在每排的两端，共有多少种不同的坐法?

(20)（本小题 14 分）

如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 是 BB_1 的中点.



（I）求证： $A_1D\perp AC_1$；

（II）求证： BD // 平面 AMC_1；

（III）求点 A_1 到平面 AMC_1 的距离.

(21)（本小题 14 分）

已知椭圆 E ： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$， $O(0,0)$， $A(a,0)$， $B(0,b)$，点 M 在线段 AB 上，且 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，直线 OM 的斜率为 $\dfrac{1}{4}$.

（I）求椭圆 E 的离心率;

（II）若直线 l 与椭圆 E 交于 C, D 两点,弦 CD 的中点为 $(-2,1)$，且 $|CD|=\sqrt{10}$，求椭圆 E 的方程.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2022 北京昌平高二（上）期末数学

参考答案

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	C	B	A	D	C	B	A

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）-1　　（12）9　84　　（13）$y=\pm\sqrt{2}x$　6

（14）-2　　（15）$x+y-2=0$　　（16）①②④

（第 12、13 题：第一空 3 分，第二空 2 分；第 16 题:答对一个给 2 分，答对两个给 3 分，全对给 5 分，不选或有错选得 0 分.）

三、解答题(本大题共 5 小题，共 70 分)

（17）（共 14 分）

解：（I）由圆 $C: x^2+y^2+4x-12y+24=0$ 整理得 $(x+2)^2+(y-6)^2=16$.　……2 分

所以圆心坐标为 $(-2,6)$；圆的半径为 4.　……6 分

（II）①当直线 l 的斜率不存在时，直线方程为 $x=0$.

圆心 $(-2,6)$ 到直线 l 的距离为 2.

此时直线 l 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{4^2-2^2}=4\sqrt{3}$，符合题意.　……8 分

②当直线 l 的斜率存在时，设直线方程为 $y=kx+5$.　……9 分

因为弦长为 $4\sqrt{3}$，半径为 4，

所以圆心到直线 l 的距离为 2.　……10 分

根据点到直线距离公式

$\dfrac{|-2k-6+5|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，　……12 分

所以直线方程为 $3x-4y+20=0$.

综上，直线方程为 $3x-4y+20=0$ 或 $x=0$.　……14 分

（18）（共 14 分）

解：（I）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，

因为 $AD // BC$， $AD \not\subset$ 平面 PBC， $BC \subset$ 平面 PBC，

所以 $AD //$ 平面 PBC.　……4 分

（II）因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AB \perp AD$，

所以 $PA \perp AB, PA \perp AD$.

以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 方向为 x 轴， y 轴， z 轴的正方向，如图建立空间直角坐标系.

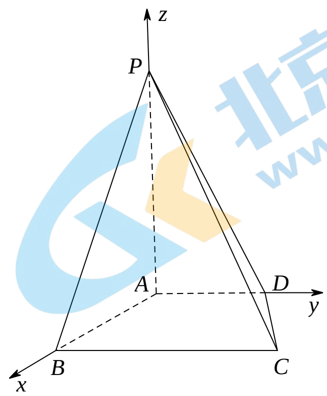
则　……5 分

$A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$ ，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{PD}=(0,1,-2)$.　　　　……6 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x+2y-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$$ ……7 分



令 $z=1$，则 $y=2,x=-1$.

所以 $\vec{n}=(-1,2,1)$.　　　　……8 分

设直线 PB 和平面 PCD 所成的角为 θ .

因为 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{PB}>|=|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PB}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线 PB 和平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　　　……10 分

（III）因为 $AB\perp AD$， $AB\perp AP$， $AP\cap AD=A$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD .

所以平面 PAD 的法向量为 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$.　　　　……11 分

所以 $\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　　　　……13 分

由题知，二面角 $A-PD-C$ 为钝二面角，

所以二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　　　　……14 分

（19）（共 14 分）

解：（I）7 个人分成两排就座，第一排 4 人，第二排 3 人，

共有 $A_7^7=5040$ 种不同的坐法.　　　　……4 分

（II）法一：甲和乙都在第二排，有 $A_4^2A_5^5=1440$ 种不同的坐法；　　……9 分

法二：甲和乙都在第二排，有 $A_5^3A_4^4=1440$ 种不同的坐法；　　……9 分

（III）法一：

如果甲和乙不能坐在每排的两端，共有 $A_3^2A_5^5=720$ 种不同的坐法. ……14 分

法二：

如果甲和乙不能坐在每排的两端，共有 $A_5^4A_3^3=720$ 种不同的坐法. ……14 分

法三：

甲坐在第一排的中间，乙坐在第二排的中间两个位置，共有 $A_1^1A_2^1A_5^5=240$ 种不同的坐法；

乙坐在第一排的中间，甲坐在第二排的中间两个位置，共有 $A_1^1A_2^1A_5^5=240$ 种不同的坐法；

甲和乙坐在第二排的中间两个位置，共有 $A_2^2A_5^5=240$ 种不同的坐法；

所以甲和乙不能坐在每排的两端，共有 720 种不同的坐法.　　……14 分

（20）（共 14 分）

解：（I）法一：

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连结 AD_1，BC_1.

因为 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，　$A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1，

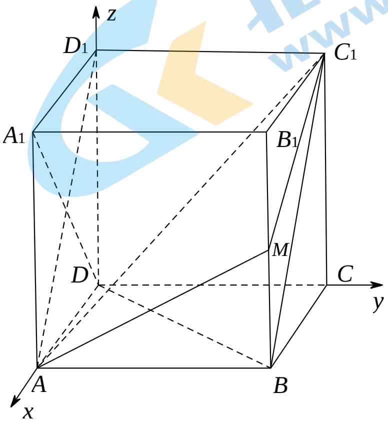
所以 $A_1D\perp AB$.　　……1 分

因为 $A_1D\perp AD_1$，　$AB\cap AD_1=A$，

所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1.　　……3 分

因为 $AC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1，

所以 $A_1D\perp AC_1$.　　……4 分



法二：

因为 $DA\perp DC, DA\perp DD_1, DC\perp DD_1$，

所以以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，如图建立空间直角坐标系.

则　　……1 分

$D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), A_1(1,0,1), C_1(0,1,1), D_1(0,0,1), M(1,1,\frac{1}{2})$.

所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$.　　……2 分

因为 $\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=1\times(-1)+0\times1+1\times1=0$，　　……3 分

所以 $A_1D\perp AC_1$.　　……4 分

（II）因为 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{AM}=(0,1,\frac{1}{2})$，　　……5 分

设平面 AMC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}-x+y+z=0,\\ y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$$

令 $z=2$，则 $y=-1, x=1$.

所以 $\vec{n}=(1,-1,2)$.　　……7 分

因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=1\times1+1\times(-1)+0\times2=0$，

所以 $\overrightarrow{BD}\perp\vec{n}$.　　……8 分

因为 $BD\not\subset$ 平面 AMC_1，

所以 $BD//$ 平面 AMC_1.　　……9 分

（III）因为 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$ ，　　……10 分

所以 $\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|0\times1+0\times(-1)+1\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.　　……14 分

所以点 A_1 到平面 AMC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（21）（共 14 分）

解：（I）设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{BM}=(x,y-b)$， $\overrightarrow{MA}=(a-x,-y)$.　　　　……1 分

因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 $M(\frac{2a}{3},\frac{b}{3})$.　　　　……2 分

因为 $k_{OM}=\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{y}{x}=\frac{1}{4}$.　　　　……3 分

所以 $\frac{\frac{b}{3}}{\frac{2a}{3}}=\frac{1}{4}$，解得 $a=2b$.　　　　……4 分

根据 $a^2=b^2+c^2$，得到 $c=\sqrt{3}b$.　　　　……5 分

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　　　……6 分

（II）由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线方程为 $y=k(x+2)+1$. ……7 分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=k(x+2)+1,\end{cases}$，得到 $(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+4(2k+1)^2-4b^2=0$……8 分

设 $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$.

则 $x_1+x_2=-\frac{8k(2k+1)}{1+4k^2}$， $x_1\cdot x_2=\frac{4(2k+1)^2-4b^2}{1+4k^2}$.　　　　……10 分

由 $x_1+x_2=-4$, 即 $-\frac{8k(2k+1)}{1+4k^2}=-4$，得到 $k=\frac{1}{2}$.　　　　……11 分

所以直线方程为 $x-2y+4=0$.

当 $k=\frac{1}{2}$ 时， $x_1\cdot x_2=8-2b^2$.

因为 $|CD|=\sqrt{10}$,即

$|CD|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{10}$，　　……12 分

即 $\sqrt{(1+(\frac{1}{2})^2)\left[(-4)^2-4(8-2b^2)\right]}=\sqrt{10}$.

解得 $b^2=3$.　　　　……13 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.　　　　……14 分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了**【2022 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总】**专题，及时更新最新试题及答案。

通过**【北京高考资讯】公众号**，**对话框回复【期末】**或者**底部栏目<试题下载→期末试题>**，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！