

第 42 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

2025 年 10 月 25 日 9:00-12:00

提示：对于多元函数 $f(x, y, z)$ 有， $\partial_x f(x, y, z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{d}{dx} f(x, y, z)|_{y,z \text{ 不变}}$ ，余类推。

一. (45 分) 在许多生物分子的自组装过程中，极性分子间的电偶极相互作用在决定分子排布中扮演着重要角色。在蛋白质片段中，极性分子之间往往受到空间限制：一部分极性分子固定在膜或支架上，另一部分可在轨道上滑动或转动。这种空间几何限制与偶极作用的耦合，形成了高度方向性的势能分布，决定了生物分子的稳定构型。如图 1a，在 x - y 二维平面上模拟上述现象：中心固定在坐标原点 O 处的极性分子 A 具有永久电偶极矩 p_1 ，大小为 p ，方向沿 y 轴正方向；极性分子 B 具有永久电偶极矩 p_2 ，大小也为 p ，方向与 y 轴的夹角为 θ ($-\pi < \theta \leq \pi$)，质心位于 $(x, y=b)$ 处，其中 $b > 0$ ， x 可变。经过 $y=b$ 处有一条平行于 x 轴的光滑细导轨，分子 B 的质心由质量可忽略的光滑绝缘轴与导轨连接，绝缘轴垂直于 x - y 平面且长度可忽略，可以沿着导轨运动。已知分子 B 的质量为 m ，质心位于绝缘轴处，为计算方便起见取其绕绝缘轴的转动惯量为 $I = \frac{1}{12}mb^2$ 。 x 轴方向和 y 轴方向的单位矢量分别记为 e_x 、 e_y ，真空介电常量为 ϵ_0 。不计重力。

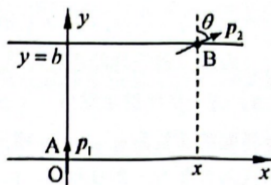


图 1a

向与 y 轴的夹角为 θ ($-\pi < \theta \leq \pi$)，质心位于 $(x, y=b)$ 处，其中 $b > 0$ ， x 可变。经过 $y=b$ 处有一条平行于 x 轴的光滑细导轨，分子 B 的质心由质量可忽略的光滑绝缘轴与导轨连接，绝缘轴垂直于 x - y 平面且长度可忽略，可以沿着导轨运动。已知分子 B 的质量为 m ，质心位于绝缘轴处，为计算方便起见取其绕绝缘轴的转动惯量为 $I = \frac{1}{12}mb^2$ 。 x 轴方向和 y 轴方向的单位矢量分别记为 e_x 、 e_y ，真空介电常量为 ϵ_0 。不计重力。

(1) 求极性分子 A 在极性分子 B 处产生的电场强度 E_1 ；

(2) 求极性分子 B 受到的电场力沿 x 方向的分量 F_x ，和其受到的绕绝缘轴的力矩 M ，导出其静止不动的条件；

(3) 分析极性分子 B 在其平衡位置（只需要考虑其中 θ 较小的那个平衡位置）附近的稳定性，求出分子 B 偏离该平衡位置较小时 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 的一般表达式（由于暂未给出初始条件，结果中可包含待定积分常量）；

(4) 将极性分子 B 在初始位置 $x=a$ ($0 < a \ll b$)、 $\theta=0$ 处由静止释放，求 t 时刻 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 的具体表达式。

二. (45 分) [约定：沿 x 轴正方向传播的一维简谐横波可表示为

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0) = \text{Re}[\tilde{y}(x, t)], \quad \tilde{y}(x, t) = A e^{i(kx - \omega t + \phi_0)} = \tilde{A}(x) e^{-i\omega t}$$

其中 A 、 ω 、 k 和 ϕ_0 分别为振幅、角频率、波矢（可用 ω 和介质参量表示）和初相位， $\tilde{A}(x) = A e^{i(kx - \phi_0)}$ 称为波在 x 处的复振幅。]

具有空间周期性的弹性介质称为“声子晶体”。现讨论角频率为 ω 的小幅横波在一维弦线上的传播特性。不计重力。

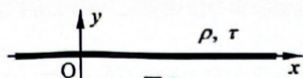


图 2a

(1) 考虑一根无限长均匀弦线，其质量线密度为 ρ 、张力为 τ ， x 轴沿弦线方向，如图 2a 所示。一列振幅为 A 、初相位为 0 的简谐波沿 x 轴正方向传播。求在 t 时刻、 x 处沿 x 方向单位原长弦线的动能 $\epsilon_k(x, t)$ 和势能 $\epsilon_p(x, t)$ （取没有波传播时弦线的势能为零），以及瞬时能流 $I(x, t)$ 和平均能流 $\bar{I}$ 。

(2) 弦线中同时存在沿 x 轴正方向和负方向传播的简谐波时，将这两列波在 $x=x_1$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_1$ 、 $\tilde{B}_1$ ，在 $x=x_2$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_2$ 、 $\tilde{B}_2$ ， $\tilde{A}_2$ 、 $\tilde{B}_2$ 可用 $\tilde{A}_1$ 、 $\tilde{B}_1$ 表示为 $\begin{cases} \tilde{A}_2 = \tilde{M}_{11}\tilde{A}_1 + \tilde{M}_{12}\tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 = \tilde{M}_{21}\tilde{A}_1 + \tilde{M}_{22}\tilde{B}_1 \end{cases}$ ，其矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \equiv \tilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\hat{M}$ 称为从 $x = x_1$ 到 $x = x_2$ 的传输矩阵。

考虑两根半无限长弦线在 $x = 0$ 处相连，分界面存在某种约束使其两侧的张力大小可以不等（下同）， $x < 0$ 部分的弦线 1 的线密度为 ρ_1 、张力为 τ_1 ， $x > 0$ 部分的弦线 2 的线密度为 ρ_2 、张力为 τ_2 ，如图 2b 所示。

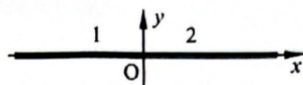


图 2b

(2.1) 求系统从 $x = 0^-$ 到 $x = 0^+$ 的传输矩阵 $\hat{M}_{12}$ ；

(2.2) 一列简谐波从左侧远处沿 x 轴正方向传播，在分界面 $x = 0$ 处入射并发生反射和透射，求透射率 T （透射波的平均能流 $\bar{I}_t$ 与入射波的平均能流 $\bar{I}_i$ 之比）。

(3) 进一步考虑由弦线 1 (ρ_1 、 τ_1) 和弦线 2 (ρ_2 、 τ_2) 组成的有多个分界面的弦线系统： $x < 0$ 部分为半无限长的弦线 2， $x > 0$ 部分从左到右依次为长度为 a 的弦线 1、长度为 b 的弦线 2、长度为 a 的弦线 1、半无限长的弦线 2，如图 2c 所示。

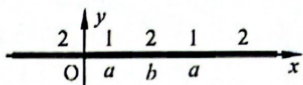


图 2c

(3.1) 求系统从 $x = 0^-$ 到 $x = a^+$ 的传输矩阵 $\hat{M}_{12}$ （将矩阵元复数 $\bar{z}$ 都表示为“ $\text{Re}(\bar{z}) + i\text{Im}(\bar{z})$ ”的形式）；

(3.2) 一列简谐波从左侧远处沿 x 轴正方向传播，在各分界面发生反射和透射，求系统的透射系数 $\bar{t}$ （ $x = (2a + b)^+$ 处透射波的复振幅 $\bar{A}_t$ 与 $x = 0^-$ 处入射波的复振幅 $\bar{A}_i$ 之比）。

(4) 考虑长度为 a 的弦线 1 (ρ_1 、 τ_1) 和长度为 b 的弦线 2 (ρ_2 、 τ_2) 交替排列，构成空间周期为 $d = a + b$ 的周期性结构，即一维声子晶体，如图 2d 所示。根据布洛赫定理，在周期性介质中传播的一维波 $\bar{y}(x, t)$ ，可表示为复振幅周期调制的平面波形式，即

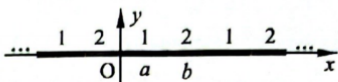


图 2d

$$\bar{y}(x, t) = \bar{u}_K(x) e^{i(Kx - \omega t)}$$

其中调幅因子 $\bar{u}_K(x)$ 是周期为 d 的函数，满足 $\bar{u}_K(x + d) = \bar{u}_K(x)$ ， K 为布洛赫波矢。

(4.1) 对于此一维声子晶体允许传播的波，求角频率 ω 与波矢 K 满足的关系式。波允许传播时 ω 的一个连续范围为声子晶体能带中的一个“通带”，不允许传播时的一个连续范围为一个“禁带”。对于此一维声子晶体含有最低角频率的通带，求长波极限（即 $K \rightarrow 0$ ）下波的相速度 v_p 。

(4.2) 若 $\rho_1 = 2\rho_2$ 、 $\tau_1 = 2\tau_2$ 、 $a = 2b$ ，求此一维声子晶体各禁带对应 ω 的范围，以及各禁带的角频率宽度 $\Delta\omega$ ，结果用 ρ_2 、 τ_2 、 b 表示。

(4.3) 晶体中机械波的传播模式对应的准粒子称为“声子”。一维声子晶体中，声子的能量 ε 、动量 p 与角频率 ω 、波矢 K 之间满足德布罗意关系。若波矢 K 在 $K_0 = \frac{\pi}{d}$ 附近，即 $K = K_0 + \delta K$ ($\delta K \ll K_0$)，声子能量可表示为 $\varepsilon(K) \approx \varepsilon(K_0) + \frac{(\hbar \delta K)^2}{2m^*}$ ， $\hbar$ 为约化普朗克常量， m^* 称为声子的有效质量。对于第 (4.2) 问中的一维声子晶体的含有最低角频率的通带，求波矢为 K_0 的声子的有效质量 m^* ，结果用 $\hbar$ 、 ρ_2 、 τ_2 、 b 表示。

三. (45 分) 在液氦中有一个游离电子。由于泡利不相容原理，距离游离电子很近的氦原子会受到电子的强烈排斥，从而在电子周围形成一个没有氦原子的球形小空洞，这个空洞被称为“电子气泡”；此外氦原子还会被电子产生的电场极化从而被电子吸引，导致在电子气泡之外的氦原子密度升高。电子加速时会带着气泡和被吸引的氦原子一起加速，因此液氦里游离电子的“有效质量”远大于自由电子质量 m_e 。已知在一个标准大气压 $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下，液氦的密度 $\rho_0 = 125 \text{ kg/m}^3$ ，表面张力系数 $\sigma = 3.7 \times 10^{-4} \text{ N/m}$ ，相对介电常数 $\epsilon_r = 1.0556$ ，体模量 $B \equiv -V \frac{dp}{dV} = 8.24 \times 10^8 \text{ kg/(m} \cdot \text{s}^2)$ (其中 V 是体积， p 是压强)； $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，真空介电常数 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ，普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ ，元电荷量 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，

氢原子质量 $M = 6.646 \times 10^{-27} \text{kg}$ 。

以下第(1)至第(6)问只要求导出表达式,不要代入具体数值。

(1) 取气泡中心为原点,电子的时间平均位置与原点重合,求气泡外 R 处的电场强度 E 。

(2) 氢原子在电场 E 作用下会发生极化,每个原子的电偶极矩为 $p = \alpha E$, 其中 α 是氢原子的电极化率,它和相对介电常数有近似关系: $\epsilon_r - 1 \approx \frac{\rho_0}{M\epsilon_0} \alpha$ 。求位于 R 处每个氢原子受到电子的吸引力。

(3) 假设距离电子很远处的压强是一个大气压。如果不考虑液氢密度的改变,求平衡时距离原点 R 处的压强 $p(R)$ 。

(4) 实际上,由于上述压强的改变,液氢密度是会改变的,试利用第(3)问的结果求液氢密度的改变量 $\Delta\rho(R) \equiv \rho(R) - \rho_0$ 与 R 的关系,准确到元电荷量 e 的最低阶非零项。

(5) 气泡外液氢密度的改变是由于液氢被电子吸引过来所导致的,假设气泡半径为 r , 计算被电子吸引过来的液氢的总质量 ΔM_p 。

(6) 由于不确定性原理,电子会不停的运动,不断碰撞气泡壁产生压强。已知在半径为 r 的气泡里,电子的平均动量大小为 $\frac{h}{2r}$ 。求电子对气泡壁的压强。

(7) 泡利排斥作用的力程量级约为 10^{-9}m , 试估算在气泡壁上不同作用对压强的贡献;只考虑最重要的作用,导出平衡时气泡的半径 r 的表达式,并求其数值。

(8) 已知体积为 V 的球体在密度为 ρ_l 的液体中加速时会带动周围液体一起加速,这等效于球体质量增加 $\Delta M_0 = \frac{\rho_l V}{2}$ 。求电子在液氢中加速运动时的总有效质量与电子质量的比值。

四. (45 分) 拉格朗日点在空间科学研究中有重要意义。在该点附近,探测器能够以较少的燃料消耗长期驻留,适合部署望远镜、空间站以进行持续的天文观测。三个天体 S_1 、 S_2 和 S_3 的质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 , 且 m_3 远小于 m_1 和 m_2 , S_3 对大质量天体 S_1 和 S_2 的影响可忽略。假设 S_1 和 S_2 绕它们的质心 O 做匀速圆周运动,两者之间的距离为 R 。当小质量天体 S_3 处于空间中某些特殊点时,它相对于 S_1 和 S_2 可保持静止,这些点称为拉格朗日点。记引力常量为 G , $\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$, $\beta = 1 - \alpha$ 。在第(2)、(3)、(4)问中,假设 $\alpha \ll 1$ 。

(1) 求 S_1 和 S_2 绕其质心 O 转动的角速度 ω ;

(2) 求所有拉格朗日点的位置;

(3) 分析 S_3 在距离 S_2 最近的拉格朗日点上平衡的稳定性;

(4) 考虑 S_3 在距离 S_2 最近的拉格朗日点附近运动,假设可调控 S_3 的初始偏离位置和初始速度使其位置偏离量随时间指数变化的模式不出现,求 S_3 的位置随时间变化的表达式(在动力学方程中,仅保留偏移量的一阶项),并求初始位置和初始速度应满足的条件。

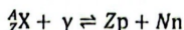
五. (45 分) 在极端高温和高密度环境下,原子核的反应达到动态平衡,各种核素的丰度不再随时间变化,仅由温度、密度和系统的化学组成决定。原子核的无规则热运动的动能远小于其静止能量,可视为非相对论粒子。粒子的数密度在动量空间的分布遵循麦克斯韦-玻尔兹曼分布

$$f(p) = \frac{1}{h^3} \exp \left[\frac{\mu - E(p)}{k_B T} \right]$$

这里 h 是普朗克常量, k_B 是玻尔兹曼常量, μ 是粒子的化学势, $E(p)$ 是动量为 p 的粒子的能量。不考虑粒子的自旋。已知光子的化学势为零。当某一反应达到平衡时候,反应物的总化学势与生成物的总化学势相等。光在真空中的速度为 c 。

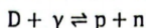
(1) 原子核的静止质量为 m , 当温度为 T 、原子核的数密度为 n 时,求原子核的化学势 μ ;

(2) 温度为 T 时,原子核 X 的光致分解与合成反应达到动态平衡



这里 γ 、 p 、 n 分别表示光子、质子、中子， Z 是核素的原子序数或者质子数， N 是中子数， $A = Z + N$ 是质量数。求此时原子核的数密度与质子的数密度、中子的数密度之间的关系。原子核 X 的质量和总结合能分别为 m_X 和 B_X 。

(3) 温度为 T 时，氘核 ${}^2_1H \equiv D$ 的光致分解与合成反应达到动态平衡



求此时粒子数密度之比 $\frac{n_D}{n_p n_n}$ 的表达式，其中 n_a 是粒子 a 的数密度($a = D, p, n$)。氘核的质量和结合能分别为 m_D 和 B_D 。

(4) 当宇宙的温度高于 $0.8\text{MeV}/k_B$ (相当于 $9.3 \times 10^9\text{K}$)时，宇宙中的质子和中子能通过热碰撞而相互转化，相应的两个核反应过程为



其中 e^- 、 e^+ 分别代表电子、正电子， ν_e 、 $\bar{\nu}_e$ 分别代表电子型中微子及其反粒子。高温时，正反中微子对和正反电子对不断大量产生、湮灭，它们的化学势为零；以上质子和中子的相互转化过程将很快达到动态平衡，求此状态下的中子数密度 n_n 和质子数密度 n_p 之比的表达式。当宇宙温度低于 $0.8\text{MeV}/k_B$ 时，以上质子和中子之间的转换很快停止(冻结)，它们的数密度之比不再随温度变化，求冻结状态下的中子数密度和质子数密度的比值。

(5) 当宇宙的温度进一步降低时，中子和质子开始结合，通过一系列核反应最终形成稳定的氦核 4_2He 。假设所有的中子都被结合到氦核中(不计中子的衰变)，试估算氦核的质量丰度(氦核占全部原子核质量的比例)。

已知质子和中子的质量分别为 $m_p = 938.272\text{MeV}/c^2$ ， $m_n = 939.565\text{MeV}/c^2$ ；积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

六. (50 分) 热辐射是电磁波，电磁波具有动量，物体在吸收、反射或者发射热辐射时会受到辐射的作用力。在讨论小行星运动时，辐射力的作用通常是被忽略的。由于小行星的自转和有限的热传导率，辐射作用力可改变小行星的运行轨道，这称为亚尔科夫斯基效应。下面利用简化模型对此进行讨论：假设太阳和小行星均为球状理想黑体，辐射能流密度 J 服从斯特藩-玻尔兹曼定律， $J = \sigma T^4 n$ ，其中 T 为黑体的表面温度， n 是辐射表面的外法向单位矢量， $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ ；小行星绕太阳做圆周运动，轨道半径为 R_a ，小行星自转角速度大小为 ω ，自转轴和公转轴相互平行，公转周期远大于自转周期。设小行星的半径为 r_a ，密度为 ρ ，比热容为 C ，热导率为 κ 。已知太阳的表面温度 $T_s = 6000\text{K}$ 、半径 $r_s = 7 \times 10^8\text{m}$ 、质量 $M_s = 2 \times 10^{30}\text{kg}$ ， $r_a \ll r_s \ll R_a$ ；引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ ，真空中的光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ 。

(1) 假设辐射传播方向垂直于理想黑体表面，证明该黑体表面单位面积因吸收辐射而受到的辐射力 F_r 和辐射能流密度 J_r 的关系为 $F_r = J_r/c$ 。

(2) 假设小行星表面温度始终保持均匀恒定，求其表面处接收的太阳辐射能流密度大小 J_0 、表面温度 T_0 分别与轨道半径 R_a 的关系；估算辐射作用力对典型小行星的运行轨道半径的相对改变量，假设典型小行星的半径为 10^3m 、密度为 $5 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$ 。

(3) 由于自转，小行星表面任意给定位置单位面积接收太阳辐射的功率随时间周期性地改变，该位置的温度也会相应地随时间改变，但二者的改变并不同步，后者会滞后于前者一个相位，这是因有限的比热容和热导率导致的。对于典型的小行星，热传导主要发生在垂直于小行星表面的方向上，并局限在厚度较小的表面层内，可用一维热传导模型来研究这个滞后相位的大小。先考虑小行星赤道上的情况；如图 6a 所示，赤道上经度为 φ 处单位表面接收的太阳

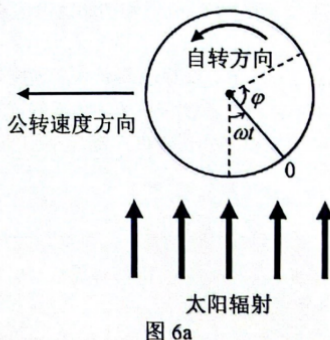


图 6a

辐射功率 $J_{\text{in}}(t, \varphi)$ 随时间 t 周期性地变化, 当 $t = 0$ 时, 经度 $\varphi = 0$ 正对太阳, 自转方向为经度 φ 增加的方向, 假设 $J_{\text{in}}(t, \varphi)$ 可表示为

$$J_{\text{in}}(t, \varphi) = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

其中 α 为常数。 t 时刻小行星内部与表面距离为 x ($x \geq 0$)处的温度 $T(t, x, \varphi)$ 满足热传导方程

$$\rho C \frac{\partial T(t, x, \varphi)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(t, x, \varphi)}{\partial x^2}$$

在表面 ($x = 0$) 处满足能流守恒方程

$$-\kappa \left. \frac{\partial T(t, x, \varphi)}{\partial x} \right|_{x=0} + J_{\text{out}}(t, \varphi) = J_{\text{in}}(t, \varphi)$$

其中 $J_{\text{out}}(t, \varphi)$ 为此处表面向外辐射的能流密度。已知热传导方程的解具有下列形式

$$T(t, x, \varphi) = T_0 + T_1 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi - \delta)$$

假设 $T_1 \ll T_0$, 求 T_1 、 γ 、 β 的表达式以及表面温度的滞后相位 δ 。

(4) 利用第(3)问的结果, 计算同一时刻小行星赤道上不同经度 φ 处由于向外辐射, 单位面积所受到的力 $F(\varphi)$, 并求整个赤道上单位面积所受到的平均辐射力 $\bar{F}$ 。

(5) 整个小行星由于向外辐射所受到的力是 $\lambda S \bar{F}$, 其中 S 为小行星的表面积, λ 为数量级为1的常数。求由于小行星向外辐射所导致的轨道运动方向上的加速度。

(6) 由于小行星运行轨道的改变十分缓慢, 其运行轨道可以始终近似为圆形, 忽略辐射对自转的影响, 求因向外辐射导致小行星的轨道半径 R_a 随时间的变化率。

(7) 考虑小行星带 ($R_a \approx 4 \times 10^{11} \text{m}$) 上石质或铁质的小行星, 哪种小行星的亚尔科夫斯基效应更强? 要使得小行星轨道从小行星带变成接近地球轨道 (半径约为 $1.5 \times 10^{11} \text{m}$), 对小行星的自转方向有何要求? 已知小行星的典型自转周期约为1h, 石头的密度 $\rho_{\text{ST}} \approx 3.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 比热容 $C_{\text{ST}} \approx 750 \text{J/(kg} \cdot \text{K)}$, 热导率 $\kappa_{\text{ST}} \approx 3 \text{W/(m} \cdot \text{K)}$; 铁的密度 $\rho_{\text{Fe}} \approx 8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 比热容 $C_{\text{Fe}} \approx 500 \text{J/(kg} \cdot \text{K)}$, 热导率 $\kappa_{\text{Fe}} \approx 70 \text{W/(m} \cdot \text{K)}$ 。

七. (45 分) 等离子体被称为物质的第四态, 宇宙中 99% 的可见物质都可视为等离子体。等离子体是由大量电子、离子和中性粒子等组成的电中性物质, 它由于阴离子和阳离子的电荷量相等, 整体呈现准中性而得名。等离子体的电中性也体现在等离子体对电场有良好的屏蔽效果, 这称之为德拜屏蔽。现考虑由电子和+1价阳离子组成的等离子体, 在平衡状态下, 离子和电子的数密度 n_j ($j = i, e$ 分别表示离子和电子) 都满足玻尔兹曼分布

$$n_j = n_{j0} \exp\left(-\frac{q_j \phi}{k_B T_j}\right)$$

其中 n_{j0} 为常量, q_j 为电荷量, ϕ 为静电势, T_j 为绝对温度, k_B 为玻尔兹曼常量。弱耦合条件为 $\frac{q_j \phi}{k_B T_j} \ll 1$, 准

中性的条件为 $n_{i0} = n_{e0} = n_0$, 元电荷量用 e 表示。

(1) 一维等离子体中的粒子满足方程 (动量方程)

$$m_j n_j (\partial_t v_j + v_j \partial_x v_j) = q_j n_j E - \partial_x p_j$$

其中 m_j 、 v_j 分别为粒子的质量和宏观速度, E 为电场强度, p_j 为压强。由此证明在平衡状态下电子满足玻尔兹曼分布 (此时电子温度空间分布均匀且不随时间变化)。

(2) 现将一个试探点电荷 q 放入题干所述等离子体中, 在弱耦合条件下:

(2.1) 求稳态时三维空间的静电势分布 $\phi(r)$, r 是场点到电荷 q 的距离;

(2.2) 导出电势分布 $\phi(r)$ 的特征长度即德拜屏蔽长度 λ_D ($\lambda_D \equiv \frac{-\phi r}{d(\phi r)/dr}$) 的表达式和电子德拜屏蔽长度 λ_{De} 的表达式 (电子德拜屏蔽长度是指离子温度趋于无穷时的德拜屏蔽长度);

(2.3) 已知 $n_0 = 1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, $k_B T_e = 10 \text{ keV}$, $k_B T_i = 1.0 \text{ keV}$, $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, 给出德拜屏蔽长度 λ_D 的数值。

(3) 德拜屏蔽效应显示, 等离子体中的电荷分离效应只在 λ_D 尺度上存在, 在远大于 λ_D 尺度上, 等离子体可视为准中性。但在离子宏观速度 v_i 和外磁场 B 不为零的情况下, 离子流受力平衡 (忽略压强) 的条件要求存在非零的平衡电场, 因而 $\Delta n = n_i - n_e \neq 0$ 。假定电场强度 E 的梯度标长为 L (若电场沿着 x 方向的分布不均匀, 梯度标长为 $\frac{E}{dE/dx}$), 系统运动的特征圆频率 $\omega_0 \approx \frac{v_i}{L}$ 。用 ω_{pe} (即 $\sqrt{\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e}}$)、 ω_{ce} (即 $\frac{eB}{m_e}$) 和 ω_0 将 $\frac{\Delta n}{n}$ 近

似表出; 假定特征频率 $\frac{\omega_0}{2\pi} = 1 \text{ GHz}$, 磁场 $B = 1 \text{ T}$, $n_0 = 1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, 估算 $\frac{\Delta n}{n}$ 的数值。

(4) 电子与离子的巨大质量差异使得等离子体中的波动现象丰富而复杂, 从次声波到超高频的电磁波都可以在等离子体中观测到。现在我们关注声波频率范围内的波动现象。无磁场情况下, 等离子体中的各成分除满足 (1) 中的动量方程之外, 还受到如下方程组的约束:

$$\begin{cases} \partial_t n_j + \partial_x (n_j v_j) = 0 \\ (\partial_t + v_j \partial_x) (p_j n_j^{-\gamma_j}) = 0 \\ \partial_x E = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \end{cases}$$

其中, γ_j ($j = i, e$) 表示粒子的多方指数。假设等离子体平衡时在自由空间中均匀分布且无宏观流动, 现在该等离子体中有 $\exp(-i\omega t + ikx)$ 形式的小扰动, 保留扰动量的一阶项, 利用上述方程组导出 ω 与 k 满足的一般关系式, 用 ω 、 k 、 γ_j 、 m_j 、 T_j 、 λ_{De} 和 k_B 表示 (所有扰动量的下标用 1 表示, 未扰动量用 0 表示)。

(5) 在 ω^2 与 $k^2 \frac{k_B T_e}{m_i}$ 量级相同 (T_e 与 T_i 量级相同) 的情况下, 从第 (4) 问中的一般关系式导出 $\omega^2 = \omega^2(k)$ 的简化表达式, 即所谓的色散关系 (只保留领头阶项); 在什么条件下, 该色散关系可以退化成经典离子声波的色散关系 $\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_e k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{m_i}$?

(6) 在 ω^2 与 $k^2 \frac{k_B T_e}{m_e}$ 量级相同 (T_e 与 T_i 量级相同) 的情况下, 第 (4) 问中的一般关系式又给出怎样的简化色散关系 (只保留领头阶项)? 并给出波的群速度 v_g 的表达式 (用 ω_{pe}^2 和其他已知量表示)。

(7) 假设电子满足弱耦合条件下的玻尔兹曼分布, 第 (4) 问中的方程 $\partial_x E = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e)$ 换成准中性条件 $n_i = n_e$, 离子满足的方程保持不变, 导出此时离子声波的色散关系 $\omega^2 = \omega^2(k)$, 并指出如何由经典离子声波的色散关系 (见第 (5) 问) 得到该结果。

第 42 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题解答与评分标准

一. (45 分)

(1) 电偶极矩 $\mathbf{p}_1$ 在位置 $\mathbf{r}$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}_1 r^2}{r^5} \quad (1)$$

代入分子 A 的电偶极矩 $\mathbf{p}_1 = p\mathbf{e}_y$ 和分子 B 的位置 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$, 得分子 A 在分子 B 处产生的电场强度

$$\mathbf{E}_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3bx\mathbf{e}_x + (2b^2 - x^2)\mathbf{e}_y}{(x^2 + b^2)^{5/2}} \quad (2)$$

(2) 电偶极矩为 $\mathbf{p}_2 = p\sin\theta\mathbf{e}_x + p\cos\theta\mathbf{e}_y$ 的极性分子 B 在分子 A 的电场 $\mathbf{E}_1$ 中的电势能

$$W = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3bx\sin\theta + (2b^2 - x^2)\cos\theta}{(x^2 + b^2)^{5/2}} \quad (3)$$

因此分子 B 受到的电场力沿 x 方向的分量

$$F_x(x, \theta) = -\left(\frac{dW}{dx}\right)_{\theta \text{ 不变}} = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b(b^2 - 4x^2)\sin\theta + x(x^2 - 4b^2)\cos\theta}{(x^2 + b^2)^{7/2}} \quad (4)$$

其受到的绕绝缘轴的力矩

$$M(x, \theta) = -\left(\frac{dW}{d\theta}\right)_{x \text{ 不变}} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3bx\cos\theta - (2b^2 - x^2)\sin\theta}{(x^2 + b^2)^{5/2}} \quad (5)$$

平衡时要求

$$\begin{cases} F_x(x, \theta) = 0 \\ M(x, \theta) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

即

$$\begin{cases} b(b^2 - 4x^2)\sin\theta + x(x^2 - 4b^2)\cos\theta = 0 \\ 3bx\cos\theta - (2b^2 - x^2)\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

解得

$$\begin{cases} x = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \quad (8)$$

静止条件: 分子 B 位于 $x = 0$ 的位置, 且其电偶极矩 $\mathbf{p}_2$ 指向 z 轴正方向或负方向。

(3) 根据题意, 对于平衡位置 $\begin{cases} x = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$, 考虑小扰动, 即 x 、 θ 均为小量。

根据质心运动定理, 将④式保留至小量的一阶项得

$$F_x(x, \theta) \approx \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 b^5} 3(\theta b - 4x) = m\ddot{x} \quad (9)$$

根据绕绝缘轴的转动定理, 将⑤式保留至小量的一阶项得

$$M(x, \theta) \approx \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 b^4} (3x - 2b\theta) = I\ddot{\theta} \quad (10)$$

代入 $I = \frac{1}{12}mb^2$, 令 $\omega_0^2 = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 b^5 m}$, 可得线性微分方程组

$$\begin{cases} \omega_0^2(-12x + 3\theta b) = \ddot{x} \\ \omega_0^2(3x - 2\theta b) = \frac{1}{12}\ddot{\theta}b \end{cases} \quad (11)$$

考虑简正模式，即 $x(t)$ 、 $\theta(t)$ 以相同的角频率同步振动，设 $\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \theta(t)b = B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$ ，代入⑪式得

$$\begin{cases} (-12 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2})A + 3B = 0 \\ 3A + (-2 + \frac{1}{12} \frac{\omega^2}{\omega_0^2})B = 0 \end{cases} \quad (12)$$

关于 A 、 B 的齐次方程组存在非零解的条件为

$$\det \begin{pmatrix} -12 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} & 3 \\ 3 & -2 + \frac{1}{12} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{pmatrix} = (-12 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2})(-2 + \frac{1}{12} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) - 9 = 0 \quad (13)$$

解得简正频率

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{6}\omega_0 = \sqrt{\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}} \\ \omega_2 = \sqrt{30}\omega_0 = \sqrt{\frac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}} \end{cases} \quad (14)$$

此时方程组⑪式的解为

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta(t)b = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (15)$$

对于 $\omega_1 = \sqrt{6}\omega_0$ ，代入⑫式可得

$$B_1 = 2A_1 \quad (16)$$

对于 $\omega_2 = \sqrt{30}\omega_0$ ，代入⑫式可得

$$B_2 = -6A_2 \quad (17)$$

从而给出完整解

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t + \varphi_2\right) \\ \theta(t) = \frac{2A_1}{b} \cos\left(\sqrt{\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t + \varphi_1\right) - \frac{6A_2}{b} \cos\left(\sqrt{\frac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t + \varphi_2\right) \end{cases} \quad (18)$$

其中 A_1 、 φ_1 、 A_2 、 φ_2 可由初始条件确定。

⑮式表明在平衡位置 $\begin{cases} x=0 \\ \theta=0 \end{cases}$ 附近，分子 B 在小扰动下的运动为简谐振动的叠加，即此平衡位置为

稳定平衡位置

*

(4) 根据初始条件

$$\begin{cases} x(0) = a, & \dot{x}(0) = 0 \\ \theta(0) = 0, & \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

可得

$$\begin{cases} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = a, & A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sqrt{5} \sin \varphi_2 = 0 \\ 2A_1 \cos \varphi_1 - 6A_2 \cos \varphi_2 = 0, & 2A_1 \sin \varphi_1 - 6A_2 \sqrt{5} \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

解得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{3}{4}a, & \varphi_1 = 0 \\ A_2 = \frac{1}{4}a, & \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

代入⑬式可得

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4}a \cos\left(\sqrt{\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) + \frac{1}{4}a \cos\left(\sqrt{\frac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) \\ \theta(t) = \frac{3}{2}\frac{a}{b} \cos\left(\sqrt{\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) - \frac{3}{2}\frac{a}{b} \cos\left(\sqrt{\frac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) \end{cases} \quad (22)$$

评分标准： 本题共 45 分

第（1）问 5 分，①式 2 分，②式 3 分；

第（2）问 10 分，③④⑤⑦⑧式各 2 分；

第（3）问 20 分，⑨⑩⑫⑬式各 2 分，⑭⑮式各 1 分，⑯⑰式各 4 分，*2 分；

第（4）问 10 分，⑱⑲式各 4 分，⑳式 2 分。

二. （45 分）

（1）质量线密度为 ρ 、张力为 τ 的均匀弦线中的波速和波矢分别为 $v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ 、 $k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}$ 。

简谐波的方程为

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (1)$$

任意 t 时刻、在 x 处 dx 长度弦线具有的动能

$$dE_k(x, t) = \frac{1}{2} \rho dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (2)$$

所以单位长度弦线具有的动能

$$\varepsilon_k(x, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) \quad (3)$$

dx 长度（原始长度）弦线储存的弹性势能

$$dE_p(x, t) = \tau(ds - dx) = \tau \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx \approx \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4)$$

所以单位长度弦线的弹性势能

$$\varepsilon_p(x, t) = \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) = \varepsilon_k(x, t) \quad (5)$$

质元的动能和势能同步变化。单位长度弦线的机械能

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_k(x, t) + \varepsilon_p(x, t) = \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) \quad (6)$$

单位时间传过 x 处截面的机械能（即瞬时能流）

$$I(x, t) = \frac{\varepsilon(x, t) v dt}{dt} = \varepsilon(x, t) v = \sqrt{\rho \tau} \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) \quad (7)$$

[解法二：

任意 t 时刻、在 x 处弦线左侧对右侧做功的功率

$$P(x, t) = -\tau \sin \theta \frac{\partial y}{\partial t} \approx -\tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\rho \tau} \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) \quad (6')$$

单位时间传过 x 处截面的机械能（即瞬时能流）

$$I(x, t) = P(x, t) = \sqrt{\rho \tau} \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) \quad (7')$$

]

其时间平均值（即平均能流）

$$\bar{I} = \sqrt{\rho \tau} \omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{\tau}} x - \omega t \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho \tau} \omega^2 A^2 \quad (8)$$

(2)

(2.1) 弦线 1 中和弦线 2 中的波可分别表示为

$$\tilde{y}(x < 0, t) = \tilde{A}_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + \tilde{B}_1 e^{i(-k_1 x - \omega t)}, \quad k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} \quad (9-1)$$

$$\tilde{y}(x > 0, t) = \tilde{A}_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} + \tilde{B}_2 e^{i(-k_2 x - \omega t)}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} \quad (9-2)$$

其中 $\tilde{A}_1$ 、 $\tilde{B}_1$ 分别为两列波在 $x = 0^-$ 处的复振幅， $\tilde{A}_2$ 、 $\tilde{B}_2$ 分别为两列波在 $x = 0^+$ 处的复振幅。

在分界面 $x = 0$ 处质元位移连续

$$\tilde{y}(0^-, t) = \tilde{y}(0^+, t) \quad (10)$$

所以

$$\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 = \tilde{A}_2 + \tilde{B}_2 \quad (10')$$

分界面在 y 方向上受力应平衡

$$\tau_1 \sin \theta_1 = \tau_2 \sin \theta_2, \quad \text{即} \quad \tau_1 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(0^-, t) = \tau_2 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(0^+, t) \quad (11)$$

所以

$$\tau_1 k_1 (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) = \tau_2 k_2 (\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2), \quad \text{即} \quad \sqrt{\rho_1 \tau_1} (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) = \sqrt{\rho_2 \tau_2} (\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2) \quad (11')$$

由以上两个边界条件⑩'⑪'式可解得

$$\begin{cases} \tilde{A}_2 = \frac{1}{2}(1 + Z_{12})\tilde{A}_1 + \frac{1}{2}(1 - Z_{12})\tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 = \frac{1}{2}(1 - Z_{12})\tilde{A}_1 + \frac{1}{2}(1 + Z_{12})\tilde{B}_1 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Z_{12} & 1 - Z_{12} \\ 1 - Z_{12} & 1 + Z_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{12} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $Z_{12} = \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} = \frac{Z_1}{Z_2}$ (即相对阻抗), 系统从 $x = 0^-$ 到 $x = 0^+$ 的传输矩阵

$$\hat{\mathbf{M}}_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+Z_{12} & 1-Z_{12} \\ 1-Z_{12} & 1+Z_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} & 1-\sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \\ 1-\sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} & 1+\sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

(2.2) 设入射波和反射波在 $x = 0^-$ 处的复振幅分别为 $\tilde{A}_i$ 和 $\tilde{A}_r$, 透射波在 $x = 0^+$ 处的复振幅为 $\tilde{A}_t$, 由传输矩阵可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_t \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{12} \begin{pmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix}, \text{ 或 } \begin{pmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{12}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{A}_t \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{21} \begin{pmatrix} \tilde{A}_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

由此可得

$$\tilde{A}_i = (\hat{\mathbf{M}}_{21})_{11} \tilde{A}_t = \frac{1+Z_{21}}{2} \tilde{A}_t, \text{ 即 } \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i} = \frac{2}{1+Z_{21}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}}} \quad (15)$$

(注意到只用到矩阵 $\hat{\mathbf{M}}_{21}$ 的左上角矩阵元)

透射率 T 即在 $x = 0^+$ 处透射波的平均能流 $\bar{I}_t$ 与在 $x = 0^-$ 处入射波的平均能流 $\bar{I}_i$ 之比

$$T = \frac{\bar{I}_t}{\bar{I}_i} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\rho_2 \tau_2} \omega^2 |\tilde{A}_t|^2}{\frac{1}{2} \sqrt{\rho_1 \tau_1} \omega^2 |\tilde{A}_i|^2} = \sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho_2 \tau_2 / \rho_1 \tau_1}} \right)^2 = \frac{4 \sqrt{\rho_1 \tau_1 \rho_2 \tau_2}}{(\sqrt{\rho_1 \tau_1} + \sqrt{\rho_2 \tau_2})^2} \quad (16)$$

(3)

(3.1) 在弦线 1 中从 $x = 0^+$ 到 $x = a^-$ 的传输矩阵

$$\hat{\mathbf{M}}_{1a} = \begin{pmatrix} e^{ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 a} \end{pmatrix} \quad (k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}) \quad (17)$$

系统从 $x = 0^-$ 到 $x = a^+$ 的传输矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{212} &= \hat{\mathbf{M}}_{12} \hat{\mathbf{M}}_{1a} \hat{\mathbf{M}}_{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+Z_{12} & 1-Z_{12} \\ 1-Z_{12} & 1+Z_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 a} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+Z_{21} & 1-Z_{21} \\ 1-Z_{21} & 1+Z_{21} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k_1 a) + i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) & -i \frac{1}{2} (Z_{21} - Z_{12}) \sin(k_1 a) \\ i \frac{1}{2} (Z_{21} - Z_{12}) \sin(k_1 a) & \cos k_1 a - i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $Z_{12} = \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} = \frac{1}{Z_{21}}$, $k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}$, 即

$$\hat{\mathbf{M}}_{212} = \begin{pmatrix} \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) + i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} + \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) & -i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} - \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \\ i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} - \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) & \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) - i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} + \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \end{pmatrix} \quad (18')$$

(3.2) 在弦线 2 中从 $x = a^+$ 到 $x = (a + b)^-$ 的传输矩阵

$$\hat{\mathbf{M}}_{2b} = \begin{pmatrix} e^{ik_2b} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2b} \end{pmatrix} \quad (k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}) \quad (17')$$

系统从 $x = 0^-$ 到 $x = (2a + b)^+$ 的传输矩阵

$$\hat{\mathbf{M}}_{21212} = \hat{\mathbf{M}}_{12} \hat{\mathbf{M}}_{1a} \hat{\mathbf{M}}_{21} \hat{\mathbf{M}}_{2b} \hat{\mathbf{M}}_{12} \hat{\mathbf{M}}_{1a} \hat{\mathbf{M}}_{21} = \hat{\mathbf{M}}_{212} \hat{\mathbf{M}}_{2b} \hat{\mathbf{M}}_{212} \quad (19)$$

$\hat{\mathbf{M}}_{21212}$ 左上角的矩阵元为

$$(\hat{\mathbf{M}}_{21212})_{11} = \left[\cos(k_1 a) + i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) \right]^2 e^{ik_2 b} + \frac{1}{4} (Z_{21} - Z_{12})^2 \sin^2(k_1 a) e^{-ik_2 b} \quad (20)$$

设入射波和反射波在 $x = 0^-$ 处的复振幅分别为 $\tilde{A}_i$ 和 $\tilde{A}_r$ ，透射波在 $x = (2a + b)^+$ 处的复振幅为 $\tilde{A}_t$ ，由传输矩阵①⑨式可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_t \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{21212} \begin{pmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_r \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}_{21212}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{A}_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中矩阵 $\hat{\mathbf{M}}_{21212}^{-1}$ 只需将矩阵 $\hat{\mathbf{M}}_{21212}$ 中的 a 替换为 $-a$ 、 b 替换为 $-b$ 即可得到，由此可得

$$\tilde{A}_i = (\hat{\mathbf{M}}_{21212}^{-1})_{11} \tilde{A}_t = \left\{ \left[\cos(k_1 a) - i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) \right]^2 e^{-ik_2 b} + \frac{1}{4} (Z_{21} - Z_{12})^2 \sin^2(k_1 a) e^{ik_2 b} \right\} \tilde{A}_t \quad (22)$$

其中 $Z_{12} = \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} = \frac{1}{Z_{21}}$ ， $k_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}$ ， $k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}$ 。所以系统的透射系数

$$\tilde{t} = \frac{1}{\left[\cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) - i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} + \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \right]^2 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 \tau_2}{\rho_1 \tau_1}} - \sqrt{\frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}} \right)^2 \sin^2\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b}} \quad (23)$$

(4)

(4.1) 根据布洛赫定理

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x + d, t) &= \tilde{u}_K(x + d) e^{i(K(x+d) - \omega t)} = e^{iKd} \tilde{u}_K(x) e^{i(Kx - \omega t)} \\ &= e^{iKd} \tilde{y}(x, t) \end{aligned} \quad (24)$$

即空间中相隔一个空间周期 d 的振动只相差一个相位因子 e^{iKd} 。

弦线中同时存在沿 x 轴正方向和负方向传播的简谐波，在 $x = 0^-$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_1$ 、 $\tilde{B}_1$ ，在 $x = d^-$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_2$ 、 $\tilde{B}_2$ ，根据布洛赫定理即②④式可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = e^{iKd} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

对于此一维声子晶体，从 $x = 0^-$ 到 $x = d^-$ 的传输矩阵

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \hat{\mathbf{M}}_{2b} \hat{\mathbf{M}}_{12} \hat{\mathbf{M}}_{1a} \hat{\mathbf{M}}_{21} = \hat{\mathbf{M}}_{2b} \hat{\mathbf{M}}_{212} \\ &= \begin{pmatrix} \left[\cos(k_1 a) + i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) \right] e^{ik_2 b} & -i \frac{1}{2} (Z_{21} - Z_{12}) \sin(k_1 a) e^{ik_2 b} \\ i \frac{1}{2} (Z_{21} - Z_{12}) \sin(k_1 a) e^{-ik_2 b} & \left[\cos(k_1 a) - i \frac{1}{2} (Z_{21} + Z_{12}) \sin(k_1 a) \right] e^{-ik_2 b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

(26)

由此可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

由②⑤②⑦式可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} - e^{iKd} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} - e^{iKd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{B}_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

上述关于 $\tilde{A}_1$ 、 $\tilde{B}_1$ 的齐次方程组有非零解的条件是系数行列式为 0，即

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{T}_{11} - e^{iKd} & \tilde{T}_{12} \\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22} - e^{iKd} \end{pmatrix} = (\tilde{T}_{11} - e^{iKd})(\tilde{T}_{22} - e^{iKd}) - \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21} = 0 \quad (29)$$

解得

$$e^{iKd} = \frac{1}{2}[\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22} \pm \sqrt{(\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})^2 - 4(\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} - \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21})}] \quad (30)$$

注意到 $\tilde{T}_{11} = \tilde{T}_{22}^*$ 、 $\tilde{T}_{12} = \tilde{T}_{21}^*$ 、 $\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} - \tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21} = 1$ ，可解得

$$\begin{aligned} \cos(Kd) &= \frac{\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22}}{2} = \text{Re} \left[[\cos(k_1 a) + i \frac{1}{2}(Z_{21} + Z_{12})\sin(k_1 a)][\cos(k_2 b) + i \sin(k_2 b)] \right] \\ &= \cos(k_1 a)\cos(k_2 b) - \frac{1}{2}(Z_{21} + Z_{12})\sin(k_1 a)\sin(k_2 b) \end{aligned} \quad (31)$$

即角频率 ω 与布洛赫波矢 K 满足的关系（色散关系）为

$$\cos(Kd) = \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b\right) - \frac{\rho_1 \tau_1 + \rho_2 \tau_2}{2\sqrt{\rho_1 \tau_1 \rho_2 \tau_2}} \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b\right) \quad (31')$$

对于此一维声子晶体角频率最低的一个通带，当 $K \rightarrow 0$ 时 $\omega \rightarrow 0^+$ ，色散关系③①'式可展开为

$$1 - \frac{1}{2}(Kd)^2 = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{2}\left(\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b\right)^2 \right] - \frac{\rho_1 \tau_1 + \rho_2 \tau_2}{2\sqrt{\rho_1 \tau_1 \rho_2 \tau_2}} \left(\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} a\right) \left(\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b\right) \quad (32)$$

即

$$|K|d = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1} a^2 + \frac{\rho_2}{\tau_2} b^2 + \frac{\rho_1 \tau_1 + \rho_2 \tau_2}{\tau_1 \tau_2} ab} \quad (33)$$

波的相速度

$$v_p(K \rightarrow 0) = \frac{\omega}{|K|} = \frac{d}{\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1} a^2 + \frac{\rho_2}{\tau_2} b^2 + \frac{\rho_1 \tau_1 + \rho_2 \tau_2}{\tau_1 \tau_2} ab}} \quad (34)$$

(4.2) 当 $|\cos(Kd)| \leq 1$ 时，布洛赫波矢 K 为实数，对应一维声子晶体的“通带”；当 $|\cos(Kd)| > 1$ 时对应一维声子晶体的“禁带”。记 $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b$ ，由③①'式和题目条件，“禁带”满足

$$\left| \cos 2\alpha \cos \alpha - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) \sin 2\alpha \sin \alpha \right| > 1 \quad (35)$$

或表示为

$$\cos 2\alpha \cos \alpha - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) \sin 2\alpha \sin \alpha > 1 \quad (35)'-1$$

$$\text{和 } \cos 2\alpha \cos \alpha - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) \sin 2\alpha \sin \alpha < -1 \quad (35')-2$$

解得

$$\arccos \frac{2}{3} + n\pi < \alpha < \arccos \frac{1}{3} + n\pi \quad (36)-1$$

$$\text{和 } \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi < \alpha < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + n\pi \quad (36)-2$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

对应 ω 的范围为

$$\left[\arccos \frac{2}{3} + n\pi \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} < \omega < \left[\arccos \frac{1}{3} + n\pi \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \quad (37)-1$$

$$\text{和 } \left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + n\pi \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} < \omega < \left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + n\pi \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \quad (37)-2$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

各“禁带”的角频率宽度均为

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \left[\arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{2}{3} \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} = \left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \right] \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \\ &= 0.39 \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \end{aligned} \quad (38)$$

(4.3) 对于第 (4.3) 问中的一维声子晶体角频率最低的一个通带, $K_0 = \frac{\pi}{d}$ 时

$$\omega_0 = \left(\arccos \frac{2}{3} \right) \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} = 0.84 \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \quad (39)$$

取 $K = K_0 + \delta K$, $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, 色散关系③①'式可展开为

$$-1 + \frac{1}{2} d^2 (\delta K)^2 = -1 - \frac{5\sqrt{5}}{6} \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} b (\delta\omega), \quad \text{即 } \delta\omega = \frac{(\delta K)^2}{2 \left(-\frac{5\sqrt{5}}{6} \frac{b}{d^2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} \right)} \quad (40)$$

与 $\delta\varepsilon = \hbar\delta\omega = \frac{(\hbar\delta K)^2}{2m^*}$ 比较, 并注意到 $d = a + b = 3b$, 可得此时声子的有效质量

$$m^* = -\frac{5\sqrt{5}/6}{9} \frac{\hbar}{b} \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} = -\frac{5\sqrt{5}}{54} \frac{\hbar}{b} \sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} \quad (41)$$

评分标准: 本题 45 分

第 (1) 问 4 分, ③⑤⑦ (或⑦') ⑧式各 1 分;

第 (2) 问 9 分,

(2.1) 问 5 分, ⑩'式 1 分, ⑪'⑬式各 2 分;

(2.2) 问 4 分, ⑮式 1 分, ⑯式 3 分;

第 (3) 问 12 分,

(3.1) 问 5 分, ⑰式 1 分, ⑱'式 4 分;

(3.2) 问 7 分, ⑲式 1 分, ⑳㉔㉕式各 2 分;

第 (4) 问 20 分,

- (4.1) 问 9 分, ②④式 1 分, ②⑥式 2 分, ②⑨③①'1 分, ③③③④式各 2 分;
 (4.2) 问 5 分, ③⑤③⑦-1③⑦-2 式各 1 分, ③⑧式 2 分;
 (4.3) 问 6 分, ③⑨式 1 分, ④⑩式 3 分, ④⑪式 2 分。

三. (45 分)

(1) 在相对介电常数为 ϵ_r 里处于原点的点电荷产生的电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = E(R)\hat{\mathbf{R}} = -\frac{e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \quad (1)$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}$ 为 $\mathbf{R}$ 方向的单位向量。

(2) 位于 $\mathbf{R}$ 处氢原子的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$$

由①, 电场和 $\mathbf{R}$ 平行, 电偶极矩可视为位于 $\mathbf{R} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{R}}$ 带正电荷 $+q$ 、和位于 $\mathbf{R} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{R}}$ 带负电荷 $-q$ 的两个点电荷构成, 且 $\mathbf{p} = qd\hat{\mathbf{R}}$; 当电场随位置改变时, 这个电偶极矩受力为

$$\mathbf{F} = +q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{R}}\right) - q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{R}}\right) \quad (2)$$

在 $\mathbf{R}$ 处展开, 保留到 d 的一次方项得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{qd}{2} \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{R})}{dR} \hat{\mathbf{R}} - q\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{qd}{2} \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{R})}{dR} \hat{\mathbf{R}} \\ &= qd \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{R})}{dR} \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{p} \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{R})}{dR} \end{aligned} \quad (3)$$

由题意以及①, 在 $\mathbf{R}$ 处氢原子因为电子电场导致的极化为

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E} = -\frac{\alpha e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \quad (4)$$

由此在 $\mathbf{R}$ 处每个氢原子受力

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\alpha e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{R})}{dR} \hat{\mathbf{R}} = \alpha \frac{-e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2} (-2) \frac{-e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \hat{\mathbf{R}} \\ &= -\frac{2\alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} \hat{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (5)$$

[②③的另一种解法:

位于 $\mathbf{R}$ 处氢原子的电偶极矩为 $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$, 可以看成是位于 $\mathbf{R} + \mathbf{d}/2$ 带正电荷 $+q$, 和位于 $\mathbf{R} - \mathbf{d}/2$ 带负电荷 $-q$ 的两个点电荷构成, 且 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ 。当电场随位置改变时, 这个电偶极矩受力为

$$\mathbf{F} = +q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) - q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \quad (2)$$

在 $\mathbf{R}$ 处展开, 保留到 $\mathbf{d}$ 的一次方项得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{q}{2} \mathbf{d} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{E} - q\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{q}{2} \mathbf{d} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \\ &= q\mathbf{d} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (3)$$

]

(3) 氢原子数密度为 $n_0 = \frac{\rho_0}{M}$, 则由于电子吸引力导致的单位体积上的作用力大小为

$$p_p = n_0 F = -\frac{2n_0 \alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} \quad (6)$$

这个力的方向指向原点。平衡时液氢会产生压强差抵消这个作用力, 因此

$$\frac{dp}{dR} = p_p = -\frac{2n_0 \alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} \quad (7)$$

积分后可以得距离原点 R 处的压强 $p(R)$ 满足

$$p(R) - p(\infty) = \frac{n_0 \alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^4} \quad (8)$$

远处压强为 p_0 ，所以

$$p(R) = p_0 + \frac{n_0 \alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^4} \quad (9)$$

(4) 压强改变导致密度改变，从体模量的定义得

$$B = -V \frac{dp}{dV} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (10)$$

所以

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{B} = \frac{1}{B} \frac{dp}{dR} dR = -\frac{2n_0 \alpha e^2}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} dR \quad (11)$$

积分得

$$\ln \frac{\rho(R)}{\rho(\infty)} = \frac{n_0 \alpha e^2}{2B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^4} \quad (12)$$

距离电子很远处的密度为 ρ_0 。电子对液氮密度影响比较小，可以将 $\rho(R)$ 写成 $\Delta\rho(R) + \rho_0$ ，并展开到 $\Delta\rho(R)$ 的一次方项，得到

$$\ln \frac{\rho(R)}{\rho(\infty)} = \ln \frac{\rho(R)}{\rho_0} = \ln \left[1 + \frac{\Delta\rho(R)}{\rho_0} \right] = \frac{\Delta\rho(R)}{\rho_0} \quad (13)$$

结合⑫和⑬式得

$$\Delta\rho(R) = \frac{n_0 \rho_0 \alpha e^2}{2B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^4} \quad (14)$$

(5) 利用⑭式，可得气泡半径为 r 时，被电子吸引过来的所增加的液氮的总质量为

$$\begin{aligned} \Delta M_p &= \int \Delta\rho(R) dV = 4\pi \int_r^\infty \Delta\rho(R) R^2 dR \\ &= \frac{2\pi n_0 \rho_0 \alpha e^2}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2} \int_r^\infty \frac{dR}{R^2} = \frac{2\pi \alpha e^2 n_0 \rho_0}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 r} \end{aligned} \quad (15)$$

(6) 电子零点运动动能为

$$\varepsilon_K = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{2r}\right)^2}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e r^2} \quad (16)$$

气泡里电子密度为

$$n = \frac{1}{V} = \frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3}{4\pi r^3} \quad (17)$$

利用气体碰壁产生的压强公式得到电子对气泡壁的压强为

$$p_e = \frac{2}{3} n \varepsilon_K = \frac{2}{3} \frac{\frac{h^2}{8m_e r^2}}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{h^2}{16\pi m_e r^5} \quad (18)$$

(7) 平衡时，电子对气泡壁的压强等于气泡外压强 $p(r)$ 和气泡表面张力导致的压强相等，利用气泡壁张力公式可得

$$p_e = p(r) + \frac{2\sigma}{r} \quad (19)$$

结合式⑨和⑱得

$$\frac{h^2}{16\pi m_e r^5} = p_0 + \frac{n_0 \alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 r^4} + \frac{2\sigma}{r} \quad (20)$$

当电子气泡半径 $r = 1\text{nm}$ 时，抵抗电子压强的三个贡献分别为：

大气压强：

$$p_0 = 1 \text{ atm} \quad (21)$$

极化导致的压强：

$$p_p = \frac{n_0 \alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 r^4} = \frac{(\epsilon_r - 1)e^2}{2\epsilon_0(4\pi\epsilon_r)^2 r^4} = 4.58 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \simeq 4.58 \text{ atm} \quad (22)$$

表面张力的贡献：

$$p_s = \frac{2\sigma}{r} = 7.4 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \simeq 7.4 \text{ atm} \quad (23)$$

比较三者贡献，可以发现最重要的一项为表面张力。只保留表面张力贡献，可得气泡半径为

$$r = \left(\frac{h^2}{32\pi m_e \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (24) - 1$$

由②④-1 式与题给数据得

$$r = 1.9 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (24) - 2$$

（8）将②④-1 式代入⑮式，并加上气泡在液氦中运动导致的附加质量得总有效质量

$$m^* = m_e + \Delta M_p + \Delta M_b \simeq \frac{2\pi\alpha e^2 n_0 \rho_0}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 r} + \frac{1}{2} \frac{4\pi r^3}{3} \rho_0 \quad (25)$$

将 $\epsilon_r - 1 \approx \frac{\rho_0}{M\epsilon_0} \alpha$ 代入②⑤式得

$$m^* = \left[\frac{2\pi(\epsilon_r - 1)e^2}{B\epsilon_0(4\pi\epsilon_r)^2 r} + \frac{2\pi r^3}{3} \right] \rho_0 \quad (26)$$

再代入相应物理量后可得总有效质量为

$$\frac{m^*}{m_e} = 1.8 \times 10^{-24} \text{ kg}/m_e = 2 \times 10^6 \quad (27)$$

评分标准： 本题共 45 分

第（1）问 2 分，①式 2 分；

第（2）问 4 分，②-⑤式各 1 分；

第（3）问 8 分，⑥-⑨式各 2 分；

第（4）问 10 分，⑩-⑭式各 2 分；

第（5）问 2 分，⑮式 2 分；

第（6）问 6 分，⑯-⑲式各 2 分；

第（7）问 8 分，⑲式 2 分，⑳-㉓式各 1 分，㉔式 2 分；

第（8）问 5 分，㉕式 1 分，㉖㉗式各 2 分。

四. （45 分）

（1） S_1 和 S_2 到质心 O 的距离分别等于 $\frac{m_2 R}{m_1 + m_2}$ 和 $\frac{m_1 R}{m_1 + m_2}$ ，它们之间的万有引力提供了向心力。利用牛顿第二定律可得

$$m_1 \omega^2 \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = \frac{G m_1 m_2}{R^2}, \quad m_2 \omega^2 \frac{m_1 R}{m_1 + m_2} = \frac{G m_1 m_2}{R^2} \quad (1)$$

由此得

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (2)$$

[解法二:

m_1 相对于 m_2 做半径为 R 的圆周运动, 应用两体的相对运动方程得

$$\mu\omega^2 R = \frac{Gm_1 m_2}{R^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1')$$

同样可得到

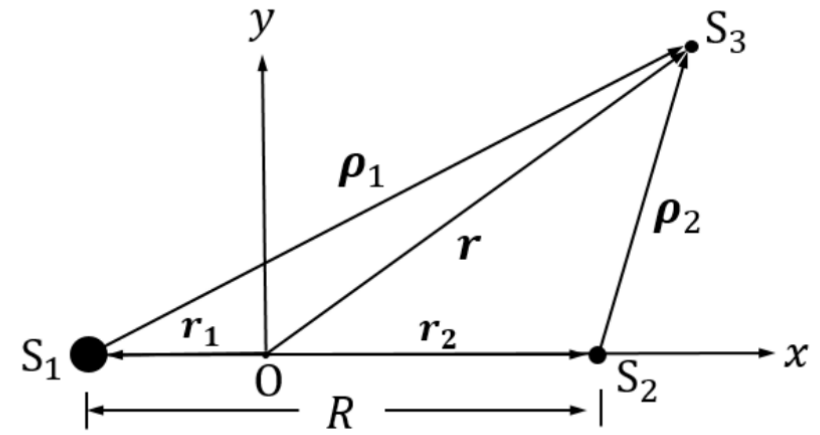
$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (2')$$

]

(2) 如题解图 4a 所示, 以质心 O 为坐标原点建立与 S_1 和 S_2 一起以角速度 ω 匀速旋转的非惯性坐标系, 以从 S_1 到 S_2 的连线为 x 轴, 角速度 ω 的方向为 z 轴, x - y 平面为 S_1 和 S_2 的轨道平面。

S_1 和 S_2 相对于 O 的矢径记为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$, 小天体 S_3 的天体相对 O 的矢径记为 $\mathbf{r}$, 相对 S_1 和 S_2 的矢径分别记为 $\boldsymbol{\rho}_1$ 和 $\boldsymbol{\rho}_2$, 则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z, & \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{r}_1 = -\alpha R \mathbf{e}_x, & \mathbf{r}_2 = \beta R \mathbf{e}_x \\ \boldsymbol{\rho}_1(t) = [x(t) + \alpha R]\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \\ \boldsymbol{\rho}_2(t) = [x(t) - \beta R]\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z \end{cases} \quad (3)$$



题解图 4a

这里 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ 分别是沿着 x 轴、 y 轴、 z 轴的单位向量。 S_1 和 S_2 对 S_3 的万有引力 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1 m_3}{\rho_1^2} \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1} = -\frac{Gm_1 m_3}{[(x + \alpha R)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} [(x + \alpha R)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z] \\ \mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_2 m_3}{\rho_2^2} \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{\rho_2} = -\frac{Gm_2 m_3}{[(x - \beta R)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} [(x - \beta R)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z] \end{cases} \quad (4)$$

除了万有引力之外, 还需要考虑惯性离心力 $\mathbf{f}_c$ 和科里奥利力 $\mathbf{f}_{cor}$,

$$\begin{cases} \mathbf{f}_c = -m_3 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -m_3 [(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}] = m_3 \omega^2 [x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y] \\ \mathbf{f}_{cor} = -2m_3 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -2m_3 \omega \mathbf{e}_z \times (\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z) = 2m_3 \omega (-\dot{x}\mathbf{e}_y + \dot{y}\mathbf{e}_x) \end{cases} \quad (5)$$

小天体 S_3 在转动参考系中的运动方程为

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{cor} = -\frac{Gm_1 m_3}{\rho_1^2} \frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1} - \frac{Gm_2 m_3}{\rho_2^2} \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{\rho_2} - m_3 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m_3 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (6)$$

将以上运动方程投影到 x 轴、 y 轴和 z 轴方向, 并消去公因子可得

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{Gm_1(x + \alpha R)}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2(x - \beta R)}{\rho_2^3} + \omega^2 x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{Gm_1 y}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2 y}{\rho_2^3} + \omega^2 y - 2\omega \dot{x} \\ \ddot{z} = -\frac{Gm_1 z}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2 z}{\rho_2^3} \end{cases} \quad (7)$$

当 S_3 处于拉格朗日点时，它相对 S_1 和 S_2 静止，故在转动参考系中满足

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$$

所以拉格朗日点的位置 (x, y, z) 由以下方程确定

$$\begin{cases} \frac{Gm_1(x + \alpha R)}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2(x - \beta R)}{\rho_2^3} - \omega^2 x = 0 \\ \left(\frac{Gm_1}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2}{\rho_2^3} - \omega^2 \right) \omega y = 0 \\ \left(\frac{Gm_1}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2}{\rho_2^3} \right) z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

上面第三个方程的解为

$$z = 0 \quad (9)$$

所以拉格朗日点一定在 $x - y$ 平面内。同理，由 y 方向的运动方程可解得

$$y = 0 \quad \text{或者}$$

$$\frac{Gm_1}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2}{\rho_2^3} - \omega^2 = 0 \quad (10)$$

当 $y = 0$ 时，拉格朗日点落在 x 轴上，由 x 方向的运动方程决定，即

$$\frac{Gm_1(x + \alpha R)}{|x + \alpha R|^3} + \frac{Gm_2(x - \beta R)}{|x - \beta R|^3} - \omega^2 x = 0 \quad (11)$$

令 $x = R(u + \beta)$ ，这里 Ru 是度量了 S_3 到 S_2 的距离，则有

$$x + \alpha R = (1 + u)R, \quad x - \beta R = uR$$

并利用

$$Gm_1 = \beta G(m_1 + m_2) = \beta \omega^2 R^3, \quad Gm_2 = \alpha G(m_1 + m_2) = \alpha \omega^2 R^3$$

可将 x 方向的运动方程可化简为

$$\frac{s_1 \beta}{(1 + u)^2} + \frac{s_0 \alpha}{u^2} - (u + \beta) = 0$$

这里 $s_0 = \text{sign}(u)$, $s_1 = \text{sign}(1 + u)$ 。将 $\beta = 1 - \alpha$ 代入上述化简的运动方程得

$$u^2[(u + 1)^3 - s_1] = \alpha[s_0 + 2s_0 u + (1 + s_0 - s_1)u^2 + 2u^3 + u^4] \quad (12)$$

这个关于拉格朗日点的方程是 u 的五次方程，没有求根公式。在 $m_2 \ll m_1$ 的极限下，即 $\alpha \ll 1$ 时，可求得近似解。根据 S_3 在 x 轴上的位置可分为下面三种情况：

(i) $s_0 = -1, s_1 = +1$

此时 S_3 在 S_1 和 S_2 之间，若 $\alpha = 0$ ，可解得 $u = 0$ ，当 $\alpha \ll 1$ 时，五次方程⑫式的近似解为

$$u \approx -\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x \approx R \left[1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (13)$$

这是第一个拉格朗日点 L_1 。

(ii) $s_0 = +1, s_1 = +1$

此时 S_3 位于 S_2 的右侧，若 $\alpha = 0$ ，可解得 $u = 0$ ，当 $\alpha \ll 1$ 时，五次方程⑫式的近似解为

$$u \approx \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x \approx R \left[1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \quad (14)$$

这是第二个拉格朗日点 L_2 。

(iii) $s_0 = -1, s_1 = -1$

此时 S_3 位于 S_1 的左侧，若 $\alpha = 0$ ，可解得 $u = -2$ ，当 $\alpha \ll 1$ 时，五次方程⑫式的近似解为

$$u \approx -2 + \frac{7}{12}\alpha \Rightarrow x \approx -R \left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right) \quad (15)$$

这是第三个拉格朗日点 L_3 。

当 $y \neq 0$ 时，拉格朗日点在 $x-y$ 平面的位置由 x 方向和 y 方向的运动方程决定，即

$$\begin{cases} \frac{Gm_1(x + \alpha R)}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2(x - \beta R)}{\rho_2^3} - \omega^2 x = 0 \\ \frac{Gm_1}{\rho_1^3} + \frac{Gm_2}{\rho_2^3} - \omega^2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

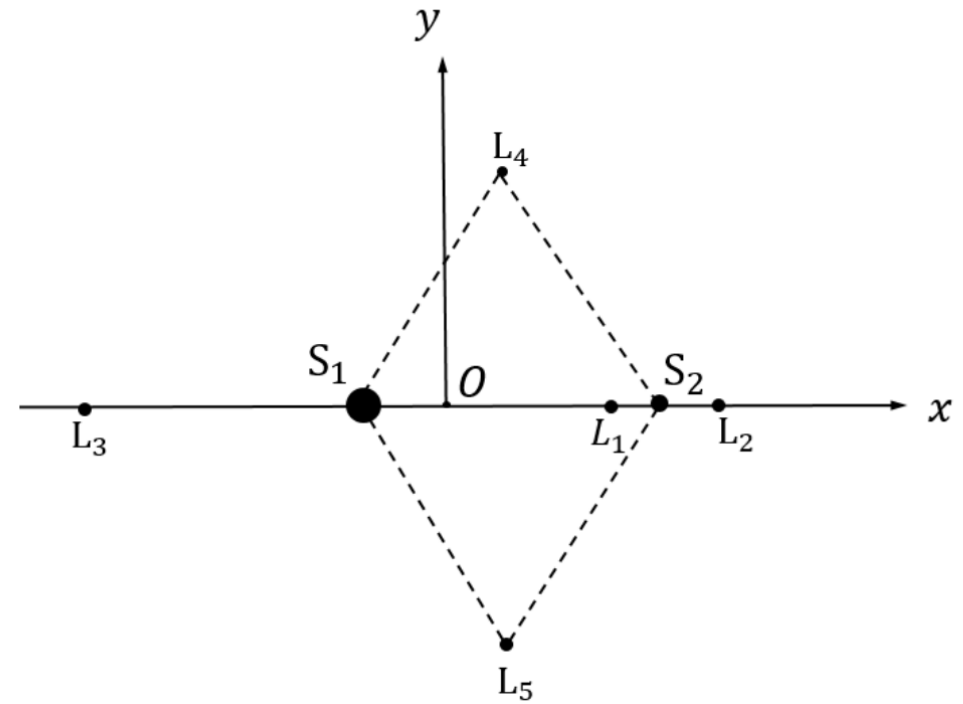
联立以上方程，可解得第四个和第五个拉格朗日点的位置为

$$L_4: x = \frac{\beta - \alpha}{2} R = \frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (17)$$

$$L_5: x = \frac{\beta - \alpha}{2} R = \frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (18)$$

综上所述，共存在五个拉格朗日点，其位置总结在下面的表格中，如题解图 4b。

拉格朗日点	位置坐标
L_1	$\left(R \left[1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right], 0, 0\right)$
L_2	$\left(R \left[1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right], 0, 0\right)$
L_3	$\left(-R \left[1 + \frac{5}{12}\alpha\right], 0, 0\right)$
L_4	$\left(\frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, \frac{\sqrt{3}}{2} R, 0\right)$
L_5	$\left(\frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)} R, -\frac{\sqrt{3}}{2} R, 0\right)$



题解图 4b

(3) 由第(2)问的结果可知，距离 S_2 最近的拉格朗日点是 L_1 和 L_2 ，其位置为 $x_0 = R \left[1 \mp \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right], y_0 = 0, z_0 = 0$ 。假设小天体 S_3 在拉格朗日点 L_1 和 L_2 附近受到小扰动、使得其偏离平衡位置，即

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z$$

这里 δx , δy 和 δz 均为小量。把上式带入到运动方程⑦式, 并把运动方程右边展开至偏移量 δx , δy , δz 的一阶, 可得

$$\begin{cases} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = 9\omega^2 \delta x + 2\omega \frac{d(\delta y)}{dt} \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} = -3\omega^2 \delta y - 2\omega \frac{d(\delta x)}{dt} \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = -4\omega^2 \delta z \end{cases} \quad (19)$$

可以看出 δz 在平衡位置附近做简谐振动, 所以这第一和第二拉格朗日点对沿着 z 轴方向的扰动均是稳定的。考虑偏移量 δx , δy 的解为指数函数, 即

$$\delta x = \delta x_0 e^{\lambda t}, \quad \delta y = \delta y_0 e^{\lambda t} \quad (20)$$

于是可得

$$\begin{cases} \lambda^2 \delta x_0 = 9\omega^2 \delta x_0 + 2\omega \lambda \delta y_0 \\ \lambda^2 \delta y_0 = -3\omega^2 \delta y_0 - 2\omega \lambda \delta x_0 \end{cases} \quad (21)$$

上述方程有非零解 δx_0 , δy_0 的条件是

$$\det \begin{pmatrix} \lambda^2 - 9\omega^2 & -2\omega \lambda \\ 2\omega \lambda & \lambda^2 + 3\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

或

$$\frac{\lambda^2 - 9\omega^2}{-2\omega \lambda} = \frac{2\omega \lambda}{\lambda^2 + 3\omega^2}$$

此即

$$\lambda^4 - 2\omega^2 \lambda^2 - 27\omega^4 = 0 \quad (22)$$

可解得 λ 的根为

$$\lambda = \pm \sqrt{2\sqrt{7} + 1} \omega \quad \text{或者} \quad \lambda = \pm i \sqrt{2\sqrt{7} - 1} \omega \quad (23)$$

正实根的存在意味着 L_1 点和 L_2 点是不稳定平衡点。

(4) 由题意知, 通过适当地选择初始条件可抑制随时间指数增长或者指数衰减的模式, 所以 δx , δy , δz 的解为

$$\begin{cases} \Delta x = a_1 \cos(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t) + a_2 \sin(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t) \\ \delta y = b_1 \cos(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t) + b_2 \sin(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t) \\ \delta z = c_1 \cos(2\omega t) + c_2 \sin(2\omega t) \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$b_1 = \frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{2\sqrt{7} - 1}} a_2, \quad b_2 = -\frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{2\sqrt{7} - 1}} a_1 \quad (25)$$

考虑到初始条件: $t = 0$ 时, $\delta x(0) = \rho_0$, $\delta y(0) = \eta_0$, $\delta z(0) = \zeta_0$, $\delta \dot{z}(0) = \dot{\zeta}_0$, 可得

$$a_1 = \rho_0, a_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}{\sqrt{7}+4}\eta_0, b_1 = \eta_0, b_2 = -\frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}\rho_0, c_1 = \zeta_0, c_2 = \frac{\dot{\zeta}_0}{2\omega} \quad (26)$$

所以小天体 S_3 的位置随时间的变化为

$$\begin{cases} \Delta x = \rho_0 \cos\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right) + \frac{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}{\sqrt{7}+4}\eta_0 \sin\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right) \\ \Delta y = \eta_0 \cos\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right) - \frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}\rho_0 \sin\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right) \\ \Delta z = \zeta_0 \cos(2\omega t) + \frac{\dot{\zeta}_0}{2\omega} \sin(2\omega t) \end{cases} \quad (27)$$

可知 x 方向和 y 方向的初始速度 $\delta\dot{x}(0) = \dot{\rho}_0$ 和 $\delta\dot{y}(0) = \dot{\eta}_0$ 为

$$\dot{\rho}_0 = \frac{2\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+4}\eta_0\omega, \quad \dot{\eta}_0 = -(\sqrt{7}+4)\rho_0\omega \quad (28)$$

因此初始位置和初始速度紧密相关。如果初始条件满足②⑧式，指数项将不出现，所以 S_3 在 L_1 和 L_2 拉格朗日点附近做准周期的运动。

评分标准： 本题共 45 分

第（1）问 3 分，①式 2 分，②式 1 分；或者①'式 2 分，②'式 1 分；

第（2）问 21 分，④⑤式各 2 分，⑧式 3 分，⑨⑩式各 2 分，⑪⑫式各 1 分，⑬⑭⑮式各 2 分，⑰⑱式各 1 分；

第（3）问 9 分，⑲式 3 分，⑳式 1 分，㉑式 2 分，㉒式 1 分，㉓式 2 分；

第（4）问 12 分，㉔式 3 分，㉕式 1 分，㉖㉗式各 3 分，㉘式 2 分。

五. (45 分)

（1）在非相对论极限下，粒子的能量为

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (1)$$

由麦克斯韦-玻尔兹曼分布，可知原子核的数密度为

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{p} e^{(\mu-E)/(k_B T)} \\ &= \frac{4\pi}{h^3} e^{\frac{\mu-mc^2}{k_B T}} \int_0^{+\infty} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) dp \\ &= \frac{4\pi}{h^3} e^{\frac{\mu-mc^2}{k_B T}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} (2mk_B T)^{3/2} \\ &= \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu-mc^2}{k_B T}} \end{aligned} \quad (2)$$

所以化学势为

$$\mu = mc^2 + k_B T \ln \left[n \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3)$$

(2) 因为核素分解及其逆过程处于动态平衡，所以反应物和生成物的化学势相等

$$\mu_X + \mu_\gamma = Z \mu_p + N \mu_n \quad (4)$$

这里光子的化学势为零 $\mu_\gamma = 0$ 。所以有

$$\mu_X = Z \mu_p + N \mu_n \quad (5)$$

并利用③式可得

$$\begin{aligned} \exp[\mu_X/(k_B T)] &= \exp[(Z\mu_p + N\mu_n)/(k_B T)] \\ &= \left[\exp(\mu_p/(k_B T)) \right]^Z \left[\exp(\mu_n/(k_B T)) \right]^N \\ &= \left[n_p \left(\frac{h^2}{2\pi m_p k_B T} \right)^{3/2} e^{m_p c^2/(k_B T)} \right]^Z \left[n_n \left(\frac{h^2}{2\pi m_n k_B T} \right)^{3/2} e^{m_n c^2/(k_B T)} \right]^N \\ &= n_p^Z n_n^N \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3A/2} \frac{1}{m_p^{\frac{3Z}{2}} m_n^{\frac{3N}{2}}} \exp[(Zm_p + Nm_n)c^2/(k_B T)] \end{aligned} \quad (6)$$

原子核 ${}_Z^AX$ 的结合能为

$$B_X = (Zm_p + Nm_n - m_X)c^2 \quad (7)$$

于是可得反应平衡时原子核的数密度为

$$\begin{aligned} n_X &= \left(\frac{2\pi m_X k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_X - m_X c^2}{k_B T}} \\ &= \left(\frac{2\pi m_X k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-m_X c^2/(k_B T)} n_p^Z n_n^N \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3A/2} \frac{1}{m_p^{3Z/2} m_n^{3N/2}} e^{(Zm_p + Nm_n)c^2/(k_B T)} \\ &= \left(\frac{m_X}{m_p^Z m_n^N} \right)^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^N e^{(Zm_p + Nm_n - m_X)c^2/(k_B T)} \\ &= \left(\frac{m_X}{m_p^Z m_n^N} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^N e^{B_X/(k_B T)} \end{aligned} \quad (8)$$

(3) 当核反应 $D + \gamma \rightleftharpoons p + n$ 达到平衡时，由上一问可知

$$n_D = \left(\frac{m_D}{m_p m_n} \right)^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} n_p n_n e^{B_D/(k_B T)} \quad (9)$$

这里 B_D 是氘核的结合能

$$B_D = (m_p + m_n - m_D)c^2 \quad (10)$$

所以可得粒子数密度之比为

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \left(\frac{m_D}{m_p m_n} \frac{h^2}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{B_D/(k_B T)} \quad (11)$$

(4) 当质子和中子的转化反应达到热平衡时，反应物和生成物的化学势相等，即

$$\mu_n + \mu_{\nu_e} = \mu_p + \mu_{e^-}, \quad \mu_n + \mu_{e^+} = \mu_p + \mu_{\bar{\nu}_e} \quad (12)$$

由题设知 $\mu_{\nu_e} = \mu_{\bar{\nu}_e} = \mu_{e^-} = \mu_{e^+} = 0$ ，所以有

$$\mu_n = \mu_p \quad (13)$$

此时质子和中子是非相对论粒子，满足麦克斯韦-玻尔兹曼分布，所以两者的数密度之比为

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{\left(\frac{2\pi m_n k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{(\mu_n - m_n c^2)/(k_B T)}}{\left(\frac{2\pi m_p k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p c^2)/(k_B T)}} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{-(m_n - m_p)c^2/(k_B T)} \quad (14)$$

当质子和中子相互转化反应冻结后，由题设知冻结温度为 $k_B T \approx 0.8 \text{ MeV}$ ，所以两者的粒子数之比为

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{-(m_n - m_p)c^2/(k_B T)} = \left(\frac{939.565}{938.272} \right)^{3/2} e^{-(939.565 - 938.272)/0.8} \approx 0.2 \quad (15)$$

(5) 由于氦原子核中包含了所有的中子，所以氦的数密度是中子数密度的一半，即

$$n_{\text{He}} = \frac{1}{2} n_n \quad (16)$$

所以氦的质量丰度（氦占宇宙质量的比例）为

$$Y_{\text{He}} = \frac{4n_{\text{He}}}{n_n + n_p} = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2}{1 + n_p/n_n} = \frac{2}{1 + 1/0.2} \approx 0.3 \quad (17)$$

评分标准：本题共 45 分

第 (1) 问 8 分，①式 2 分，②式 4 分，③式 2 分；

第 (2) 问 14 分，④式 3 分，⑤式 1 分，⑥式 3 分，⑦式 2 分，⑧式 5 分；

第 (3) 问 7 分，⑨⑩式各 2 分，⑪式 3 分；

第 (4) 问 10 分，⑫式 3 分，⑬式 1 分，⑭式 3 分，⑮式 3 分；

第 (5) 问 6 分，⑯式 2 分，⑰式 4 分。

六. (50 分)

(1) 电磁辐射是光子流，光子动量大小为 p 时，其能量 E 为

$$E = cp \quad (1)$$

单位时间垂直通过单位面积的光子的总动量为 P 时，相应的能流密度为

$$J_r = ncE\hat{p} = nc(cp) = c(ncp) = cP \quad (2)$$

式中， n 是光子的数密度。这些光子被理想黑体完全吸收，黑体单位面积单位时间内受到的冲量为 P ，因此单位面积受力为

$$F_r = P = J_r/c \quad (3)$$

(2) 太阳单位面积辐射能流密度为 σT_s^4 ，到小行星轨道时单位面积直射的能流密度为

$$J_0 = \sigma T_s^4 \frac{4\pi r_s^2}{4\pi R_a^2} = \sigma T_s^4 \frac{r_s^2}{R_a^2} \quad (4)$$

单位时间内小行星接收到的太阳辐射总能量为

$$\dot{E}_i = \pi r_a^2 J_0 \quad (5)$$

假设小行星温度处处为 T_0 ，因此单位时间内出射的能量为

$$\dot{E}_o = 4\pi r_a^2 \sigma T_0^4 \quad (6)$$

平衡时 $\dot{E}_i = \dot{E}_o$ ，因此

$$T_0 = \left(\frac{J_0}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{T_s^4 r_s^2}{4R_a^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{r_s}{2R_a}} T_s \quad (7)$$

由于温度均匀，小行星自身向外辐射在所有方向上都相同，因此辐射力为零。只须考虑太阳辐射力作用即可。

$$\mathbf{F}_{sa} = \frac{\pi r_a^2 J_0}{c} \hat{\mathbf{R}}_a = \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} \hat{\mathbf{R}}_a \quad (8)$$

这个力和小行星受到的太阳引力方向相反，且都具有与距离的平方成反比形式。考虑辐射作用后，小行星受到的合力为

$$F = \frac{GM_s M_a}{R_a^2} - \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} = \frac{4\pi GM_s \rho_a r_a^3}{3R_a^2} - \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} = \frac{GM'_s M_a}{R_a^2} \quad (9)$$

$$M'_s = M_s - \frac{3\sigma T_s^4 r_s^2}{4cG\rho_a r_a} \quad (10)$$

考虑辐射作用后，小行星受到的合力和万有引力具有相同的形式，太阳质量被修正为 M'_s 。假设小行星轨道保持为圆形，不考虑辐射时，速度为 v_a 时，轨道半径为 R_a 满足如下关系，

$$\frac{M_a v_a^2}{R_a} = \frac{GM_a M_s}{R_a^2}$$

即

$$R_a = \frac{GM_s}{v_a^2} \quad (11)$$

同理，考虑辐射之后，小行星轨道半径为

$$R'_a = \frac{GM'_s}{v_a^2} \quad (12)$$

因此考虑辐射前后轨道半径相对该变量为

$$\frac{\Delta R_a}{R_a} = \frac{R'_a - R_a}{R_a} = \frac{M'_s - M_s}{M_s} = -\frac{3\sigma T_s^4 r_s^2}{4cG\rho_a r_a M_s}$$

代入相应的物理量，对于典型的小行星，考虑辐射前后轨道半径相对该变量范围

$$\frac{\Delta R_a}{R_a} \sim -1.3 \times 10^{-10} \quad (13)$$

因此这种情况下辐射对小行星轨道运动几乎没有影响。

(3) 将题中已知的解用复数形式写为

$$T = T_0 + T_1 e^{-\gamma x + i(\omega t - \beta x + \varphi - \delta)} = T_0 + T_1 e^{-\tilde{\gamma} x + i(\omega t + \varphi - \delta)}$$

其中 $\tilde{\gamma} = \gamma + i\beta$ ，代入热传导方程得到：

$$i\omega T_1 e^{-\tilde{\gamma}x+i(\omega t+\varphi-\delta)} = \frac{k\tilde{\gamma}^2}{C\rho} T_1 e^{-\tilde{\gamma}x+i(\omega t+\varphi-\delta)} \quad (14)$$

由于 $x \geq 0$ ， $\tilde{\gamma}$ 实部应该为正数，否则当 x 很大时温度很高，不符合物理。化简上式并取实部为正的解，可得

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \gamma + i\beta &= \sqrt{\frac{iC\rho\omega}{\kappa}} = \sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}} + i\sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}} \\ \gamma = \beta &= \sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}} \end{aligned} \quad (15)$$

代入表面的能流守恒方程得

$$\tilde{\gamma}\kappa T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} + \sigma(T_0 + T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta})^4 = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad (16)$$

保留到 T_1 的一次方项得

$$\sigma T_0^4 + (\tilde{\gamma}\kappa + 4\sigma T_0^3)T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad (17)$$

由此得到和时间无关的平均温度 T_0

$$T_0^4 = \frac{J_0}{4\sigma} \quad (18)$$

（这和上小题得到的结果⑦相同），以及和时间有关的温度 T_1

$$(4\sigma T_0^3 + \tilde{\gamma}\kappa)T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} = \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad (19)$$

整理后可得

$$T_1 e^{-i\delta} = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 + \tilde{\gamma}\kappa} = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 + \sqrt{\frac{C\rho\omega\kappa}{2}} + i\sqrt{\frac{C\rho\omega\kappa}{2}}} \quad (20)$$

由此可得

$$T_1 = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \quad (21)$$

其中

$$\Phi = \frac{\sqrt{2C\rho\omega\kappa}}{8\sigma T_0^3} \quad (22)$$

$$\tan \delta = \frac{\Phi}{1 + \Phi} \quad (23)$$

[解法二：不把解化为复数形式，直接把解代入热传导方程得

$$-\omega e^{-\gamma x} \sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) = \frac{\kappa}{\rho C} e^{-\gamma x} [(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) - 2\gamma\beta \sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta)]$$

整理得

$$\frac{\kappa}{\rho C} (\gamma^2 - \beta^2) \cos(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) + \left(\omega - \frac{2\gamma\beta\kappa}{\rho C} \right) \sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) = 0 \quad (14')$$

要使得上式成立， $\cos$ 函数和 $\sin$ 函数之前的系数必须都为零，因此

$$\gamma = \beta = \sqrt{\frac{\rho C \omega}{2\kappa}} \quad (15)'$$

代入流守恒方程得，

$$\kappa T_1 [\gamma \cos(\omega t + \varphi - \delta) - \beta \sin(\omega t + \varphi - \delta)] + \sigma [T_0 + T_1 \cos(\omega t + \varphi - \delta)]^4 = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (16)'$$

保留到 T_1 的一次方项得，

$$\sigma T_0^4 + [(\kappa\gamma + 4\sigma T_0^3) \cos(\omega t + \varphi - \delta) - \kappa\gamma \sin(\omega t + \varphi - \delta)] T_1 = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (17)'$$

由此得到和时间无关的平均温度 T_0

$$T_0^4 = \frac{J_0}{4\sigma} \quad (18)'$$

（这和上小题得到的结果⑦相同），以及和时间有关的温度 T_1

$$[(\kappa\gamma + 4\sigma T_0^3) \cos(\omega t + \varphi - \delta) - \kappa\gamma \sin(\omega t + \varphi - \delta)] T_1 = \alpha J_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (19)'$$

整理得

$$4\sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2} \sigma T_0^3 T_1 \cos(\omega t + \varphi - \delta + \delta') = \alpha J_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (20)'$$

为使得上述方程对所有时间成立，要求 $\delta' = \delta$ ，因此

$$T_1 = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \quad (21)'$$

②⑩中，

$$\begin{aligned} \tan \delta' &= \frac{\kappa\gamma}{\kappa\gamma + 4\sigma T_0^3} = \frac{\Phi}{1 + \Phi} \\ \Phi &= \frac{\kappa\gamma}{4\sigma T_0^3} = \frac{\sqrt{2C\rho\omega\kappa}}{8\sigma T_0^3} \end{aligned} \quad (22)'$$

因此

$$\tan \delta = \frac{\Phi}{1 + \Phi} \quad (23)'$$

]

(4) 由于公转周期远大于自转周期, 在分析小行星辐射力时可以近似把小行星中心看成不动。建立如右图所示的直角坐标系, 其中 $\hat{r}$ 轴是太阳辐射方向 (即太阳和小行星中心连线方向), $\hat{\theta}$ 轴垂直于 $\hat{r}$ 以及自转角速度方向 $\hat{\omega}$, $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\omega}$ 三个轴构成一个右手系。当公转方向和自转方向相同时, $\hat{\theta}$ 和公转速度方向相同; 当公转方向和自转方向相反时, $\hat{\theta}$ 和公转速度方向相反。在这个坐标系下, t 时刻小行星赤道上经度为 φ 处的法向向量为

$$\hat{n}_\varphi = (-\cos(\omega t + \varphi), -\sin(\omega t + \varphi), 0) \quad (24)$$

相应的温度为

$$T = T_0 + T_1 \cos(\omega t + \varphi - \delta)$$

该处单位表面积的向外辐射对小行星的作用力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\varphi) &= -\frac{\sigma}{c} T^4 \hat{n}_\varphi = -\frac{\sigma}{c} [T_0^4 + 4T_0^3 T_1 \cos(\omega t + \varphi - \delta)] \hat{n}_\varphi \\ &= -\frac{\sigma T_0^4}{c} \hat{n}_\varphi - \frac{\alpha J_0}{c \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \cos(\omega t + \varphi - \delta) \hat{n}_\varphi \end{aligned} \quad (25)$$

上式最后一步已利用了②①式。②⑤式右端第一项各向同性, 对平均没有贡献。因此

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\alpha J_0}{2\pi c \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi - \delta) (\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)) d\varphi \\ &= \frac{\alpha J_0}{2\pi c \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \int_0^{2\pi} [\cos(\omega t + \varphi) \cos \delta + \sin(\omega t + \varphi) \sin \delta] (\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)) d\varphi \\ &= \frac{\alpha J_0}{2c \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} (\cos \delta, \sin \delta) \end{aligned} \quad (26)$$

(5) 利用三角函数关系可得

$$\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^{-2} \delta}} = \frac{\Phi}{\sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}}, \quad (27)$$

由上两个式子可得沿轨道方向的合力为

$$F = \lambda 4\pi r_a^2 \frac{\alpha J_0}{2c \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \sin \delta = \frac{2\alpha \lambda \pi r_a^2}{c} \frac{\sigma T_S^4 r_S^2}{R_a^2} \frac{\Phi}{1 + 2\Phi + 2\Phi^2} \quad (28)$$

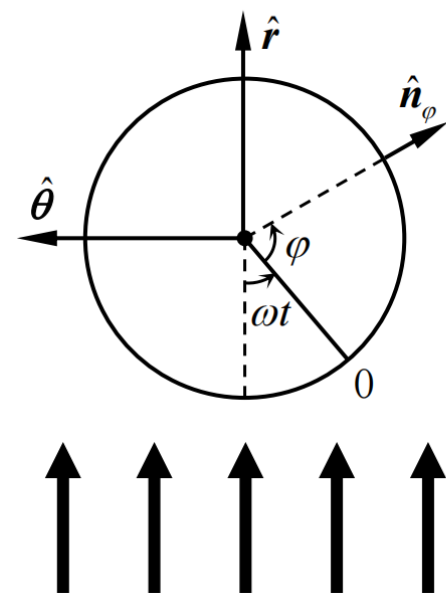
因此沿轨道方向的加速度为

$$a = \frac{F}{m_a} = \frac{F}{\frac{4\pi r_a^3 \rho}{3}} = \frac{3\alpha \lambda}{2c r_a \rho} \frac{\sigma T_S^4 r_S^2}{R_a^2} \frac{\Phi}{1 + 2\Phi + 2\Phi^2} \quad (29)$$

(6) 圆形轨道时

$$\frac{mv^2}{R_a} = \frac{GMm}{R_a^2} \Rightarrow v = \left(\frac{GM}{R_a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

于是



题解图 6a

$$a = \dot{v} = -\frac{\sqrt{GM}}{2R_a^{\frac{3}{2}}} \dot{R}_a \quad (31)$$

当自转和公转方向相同时，辐射力方向和公转方向同向，小行星加速，轨道半径变大

$$\dot{R}_a = \frac{3\alpha\lambda\sigma T_S^4 r_S^2}{cr_a\rho\sqrt{GMR_a}} \frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \quad (32)$$

已利用了②⑨式。当自转和公转方向相反时，辐射力和公转方向相反，小行星减速，轨道半径减小。

$$\dot{R}_a = -\frac{3\alpha\lambda\sigma T_S^4 r_S^2}{cr_a\rho\sqrt{GMR_a}} \frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \quad (33)$$

(7) 由④或者⑧式小行星带上的小行星平均温度为

$$T_0 = T_S \sqrt{\frac{r_S}{2R_a}} \simeq 180 \text{ K} \quad (34)$$

把石头和铁的参量代入②③式，得到

$$\Phi_{ST} = \frac{\sqrt{2C_{ST}\rho_{ST}\omega\kappa_{ST}}}{8\sigma T_0^3} = \frac{\sqrt{C_{ST}\rho_{ST}\omega\kappa_{ST}}}{2\sigma T_S^4 r_S^{\frac{3}{2}}} R_a^{\frac{3}{2}} \sim 65 \quad (35)$$

$$\Phi_{Fe} = \frac{\sqrt{2C_{Fe}\rho_{Fe}\omega\kappa_{Fe}}}{8\sigma T_0^3} \sim 390 \quad (36)$$

由此可以得到石质和铁质小行星的切向加速度（③②式）

$$a_{ST} \propto \frac{1}{\rho_{ST}} \frac{\Phi_{ST}}{1+2\Phi_{ST}+2\Phi_{ST}^2} > a_{Fe} \propto \frac{1}{\rho_{Fe}} \frac{\Phi_{Fe}}{1+2\Phi_{Fe}+2\Phi_{Fe}^2} \quad (37)$$

因此

石质小行星受到影响更大。 *

由③③要使得轨道半径减小，小行星自转方向

必须和公转方向相反。 **

评分标准： 本题共 50 分

第（1）问 3 分，①-③式各 1 分；

第（2）问 8 分，④-⑧、⑨⑪⑬式各 1 分；

第（3）问 13 分，⑭⑮式各 2 分，⑯式 1 分，⑰式 2 分，⑱⑲式各 1 分，㉑式 2 分，㉒⑳式各 1 分；

第（4）问 6 分，㉔-㉖式各 2 分；

第（5）问 6 分，㉗-㉙式各 2 分；

第（6）问 7 分，㉚式 1 分，㉛-㉝式各 2 分；

第（7）问 7 分，㉞-㉟式各 1 分，㊱式 2 分，*和**各 1 分。

七. (45 分)

(1) 稳态下，电子运动方程左边等于零，即给出

$$-\partial_x p_e + en_e \partial_x \phi = 0 \quad (1)$$

其中

$$p_e = n_e k_B T_e \quad (2)$$

电场改变电子的密度分布，温度保持不变，从而有

$$\partial_x \ln n_e = \partial_x \frac{e\phi}{k_B T_e} \quad (3)$$

给出玻尔兹曼分布

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right)$$

(2) 根据高斯定理，球坐标系下考虑球对称分布，电势只是半径 r 的函数，因此有

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) - \exp\left(\frac{-e\phi}{k_B T_i}\right) \right] \quad (4)$$

弱耦合条件下，上式中的两个指数函数可以分别展开并保留到 $\frac{e\phi}{k_B T_i}$ 的一阶，上式就变成

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} \frac{T_e + T_i}{k_B T_e T_i} \phi \quad (5)$$

令

$$\lambda_D = \left(\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} \frac{T_e + T_i}{k_B T_e T_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

于是⑤式变成

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{\phi}{\lambda_D^2} \quad (7)$$

引入函数 $u(r) = \phi r$ ，即 $\phi = \frac{u}{r}$ ，上式进一步写成

$$u'' = \frac{u}{\lambda_D^2} \quad (8)$$

解出

$$\phi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{B}{r} \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (9)$$

根据边界条件： $r \rightarrow \infty$ 时，电势趋于零，则 $B = 0$ ； $r \rightarrow 0$ 时，电势应该等于原点的点电荷 q 的电势解 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，综合即有

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (10)$$

说明电势分布的特征长度是 λ_D ，因此⑥定义的长度即为德拜长度。在离子温度趋于无穷时，得到电子德拜屏蔽长度

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

将题给数据代入⑥式得

$$\lambda_D = 22.4 \mu\text{m} \quad (12)$$

(3) 根据高斯定理

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e\Delta n}{\epsilon_0}$$

由题设给出电场的空间梯度标长为 L ，即

$$\frac{E}{dE/dx} = L$$

因此

$$\frac{dE}{dx} = \frac{E}{L}$$

可得

$$\frac{\Delta n}{n} \sim \frac{E\epsilon_0}{eLn_0} \quad (13)$$

平衡状态下，离子受到的总电磁场洛伦兹力需为零，即 $\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = 0$ ，给出

$$E \sim v_i B \sim \omega_0 L B$$

联立上两式得

$$\frac{\Delta n}{n} \sim \frac{\omega_0 \omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \quad (14)$$

代入题给数据得

$$\frac{\Delta n}{n} \sim 0.35\% \quad (15)$$

(4) 根据题意，得到如下的描述扰动量的方程组：

$$\begin{cases} -i\omega n_{j1} + ikn_{j0}v_{j1} = 0 \\ -i\omega m_j n_{j0}v_{j1} + ikp_{j1} - q_j n_{j0}E_1 = 0 \\ p_{j1} = \gamma_j k_B T_{j0} n_{j1} \\ ikE_1 = \frac{e}{\epsilon_0}(n_{i1} - n_{e1}) \end{cases} \quad (16)$$

其中用到了

$$p_{j0} = n_{j0} k_B T_{j0}$$

由⑩式得到

$$\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \left[\frac{1}{\omega^2 - \frac{k^2 \gamma_e k_B T_e}{m_e}} + \frac{\frac{m_e}{m_i}}{\omega^2 - \frac{k^2 \gamma_i k_B T_i}{m_i}} \right] = 1$$

或者展开得到

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_B T_e}{m_e} \left(\gamma_e k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \right) + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \frac{k_B T_e}{m_i} + \frac{k_B T_i}{m_i} \gamma_i k^2 \right] \\ + \frac{\gamma_i k^2 k_B^2 T_i T_e (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2) + \gamma_e k^2 k_B^2 T_e^2}{\lambda_{De}^2 m_e m_i} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

此即 ω 与 k 的一般关系式。

(5) 题目要求 $\omega^2 \sim \frac{k^2 k_B T_e}{m_i}$ ，因此有 $\frac{k^2 k_B T_e}{m_e} \gg \omega^2$ ，分析上述一般关系式⑪，可得如下领头阶项

$$-\omega^2 \frac{k_B T_e}{m_e} \left(\gamma_e k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \right) + \frac{\gamma_i k^2 k_B^2 T_i T_e (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2) + \gamma_e k^2 k_B^2 T_e^2}{\lambda_{De}^2 m_e m_i} = 0 \quad (18)$$

由此给出色散关系

$$\omega^2 = \frac{\gamma_i k^2 k_B T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k^2 k_B T_e}{m_i (1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (19)$$

当

$$k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1 \quad (20)$$

时，该色散关系变成经典离子声波色散关系

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i k_B T_i + \gamma_e k_B T_e}{m_i}$$

该条件意味着波长远大于电子德拜屏蔽长度，等离子体在扰动尺度上体现不出电荷分离效应。

(6) 题意要求 $\omega^2 \sim \frac{k^2 k_B T_e}{m_e}$, 一般关系①⑦中领头阶项为

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_B T_e}{m_e} \left(\gamma_e k^2 + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \right) \right] = 0 \quad (21)$$

由此解出的色散关系为

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} + \gamma_e k^2 \frac{k_B T_e}{m_e} = \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 \frac{k_B T_e}{m_e} \quad (22)$$

波的群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\gamma_e k \frac{k_B T_e}{m_e}}{\sqrt{\omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 \frac{k_B T_e}{m_e}}} \quad (23)$$

(7) 电子满足弱耦合条件下的玻尔兹曼分布, 此时的方程组变成

$$\begin{cases} -i \omega n_{i1} + i k n_{i0} v_{i1} = 0 \\ -i \omega m_i n_{i0} v_{i1} + i k \gamma_i k_B T_i n_{i1} + i k e n_{i0} \phi = 0 \\ n_{i1} = n_{e1}, \\ n_{e1} = n_{e0} \frac{e \phi}{k_B T_e} \end{cases} \quad (24)$$

由此得到如下色散关系

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i k_B T_i + k_B T_e}{m_i} \quad (25)$$

对比该结果与经典离子声波色散关系, 发现只要在经典色散关系中取

$$\gamma_e = 1 \quad (26)$$

即可得到上述色散关系。 $\gamma_e = 1$ 意味等温过程, 电子玻尔兹曼分布正好是在等温条件下获得的。

评分标准: 本题共 45 分

第 (1) 问 3 分, ①②③式各 1 分;

第 (2) 问 7 分, ④⑤⑥⑨⑩⑪⑫式各 1 分;

第 (3) 问 5 分, ⑬⑭式各 2 分, ⑮式 1 分;

第 (4) 问 12 分, ⑯式 7 分, ⑰式 5 分;

第 (5) 问 5 分, ⑱⑲式各 2 分, ⑳式 1 分;

第 (6) 问 5 分, ㉑㉒式各 1 分, ㉓式 3 分;

第 (7) 问 8 分, ㉔式 4 分, ㉕式 3 分, ㉖式 1 分。