高三数学考前练习试题（含答案）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\{-1,-2,0,1\}$， $B=\{x|x+1\leq 0\}$，则集合$A\cap B$的元素个数为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．如果实数a，b，c满足：$a>b>c$，则下列不等式一定成立的是（　）

A．$ac^2>bc^2$　　B．$a^2>b^2>c^2$　　C．$a+c>2b$　　D．$a-c>b-c$

3．在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(1,-3)$，则复数$\frac{z}{i}$的虚部是（　）

A．1　　B．-1　　C．$-i$　　D．i

4．二项式$(2x-y)^8$的展开式中第3项的二项式系数为（　）

A．-56　　B．56　　C．-28　　D．28

5．已知抛物线C：$y^2=x$的焦点为F,$A(x_0,y_0)$是C上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则$x_0=$（ ）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

6．将函数$y=sin\,2x$的图象向左平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度，得到的图象恰好关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，则φ的最小值是（　）

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

7．已知动点P在直线$3x+4y-10=0$上，过点P作圆$x^2+y^2=1$的一条切线，切点为A，则$|PA|$的最小值为（　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

8．在数学课外活动中，小明同学进行了糖块溶于水的试验，将一块质量为7克的糖块放入到一定量的水中，测量不同时刻未溶解糖块的质量，得到若干组数据，其中在第5分钟末测得的未溶解糖块的质量为3.5克，同时小明发现可以用指数型函数$S=ae^{-kt}$（a，k为常数）来描述以上糖块的溶解过程，其中S（单位：克）代表分钟末未溶解糖块的质量，则$k=$（　）

A．$ln\,2$　　B．$\ln 3$　　C．$\frac{\ln 2}{5}$　　D．$\frac{\ln 3}{5}$

9．设$\vec{a},\vec{b}$均为非零向量，则"$\vec{a}\perp\vec{b}$"是"对于任意的实数λ，都有$|\vec{a}|\leq|\vec{a}-\lambda\vec{b}|$"的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

10．已知函数$f(x)=\begin{cases}ax+1, x<0\\ \ln x, x>0\end{cases}$，若存在$x_0>0$，使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$ 成立，则实数a的取值范围是（　）

A．$-\infty,-1$　　B．$-\infty,1$　　C．$1,+\infty)$　　D．$[-1,1]$

二、填空题

11．函数$f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$的定义域为_____.

12．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$a_1=2$，$S_4=20$，则$a_3=$________；$S_n=$________.

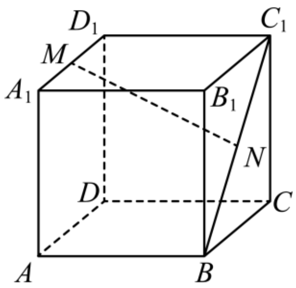
13．已知双曲线C的焦点为$F_1(0,2)$，$F_2(0,-2)$，实轴长为 2，则双曲线C的离心率是_____；若点Q是双曲线C的渐近线上一点，且$F_1Q\perp F_2Q$，则$\triangle QF_1F_2$的面积为_____.

14．设函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x\le a\\ -2x, x>a\end{cases}$.

①若$f(x)$存在最大值，则实数a的一个取值为_________.

②若$f(x)$无最大值，则实数a的取值范围是_________.

15．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，中，M，N分别为线段A_1D_1，BC_1上的动点.给出下列四个结论:



①存在点M，存在点N，满足$MN\parallel$平面ABB_1A_1；

②任意点M，存在点N，满足$MN\parallel$平面ABB_1A_1；

③任意点M，存在点N，满足$MN\perp BC_1$；

④任意点N，存在点M，满足$MN\perp BC_1$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题

16．在$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$.

(1)求B；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

(2)再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积.

条件①：$b=3$；

条件②：$\cos A=\frac{4}{5}$；

条件③：$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{3}$.

17．人工智能正在逐渐改变着我们的日常生活，不过，它所涉及的数学知识并非都是遥不可及的高深理论.为了解“拼音输入法”的背后原理，随机选取甲类题材“新闻稿”中 1200 字作为样本语料库A，其中“一”出现了 30 次，统计“一”与其后面一个字（或标点）的搭配情况，数据如下：

“一”与其后面一个字（或标点）的搭配情况	频数
“一个”	6
“一些”	4
“一穷”	2
“一条”	2
其他	a

假设用频率估计概率.

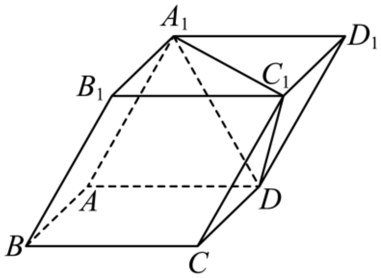
(1)求a的值，并估计甲类题材中“一”出现的概率；

(2)在甲类题材“新闻稿”中随机抽取 2 个“一”，其中搭配“一个”出现的次数为X，求X的分布列和期望；

(3)另外随机选取甲类题材“新闻稿”中 800 字作为样本语料库B进行统计，“一”出现了 24 次，“一格”出现了 2 次，若在甲类题材“新闻稿”的撰写中，输入拼音“yige”时，“一个”和“一格”谁在前面更合适？（结论不要求证明）

18．如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是正方形，平面$A_1ADD_1\perp$平面$ABCD, AD=2$，$AA_1=A_1D$.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



(1)求证：$A_1D \perp AB$；

(2)若$AA_1 = 2$.

（i）求直线AB_1与直线A_1D_1所成角的余弦值；

（ii）求点A到平面A_1C_1D的距离；

（iii）设点E为线段AA_1上任意一点（不包含端点），证明：直线CE与平面A_1C_1D相交.

19．已知中心在原点，焦点在x轴上的椭圆C的长轴长为4，焦距为2，直线l与椭圆C交于A、B两点.

(1)求椭圆C的方程；

(2)若以线段AB为直径的圆经过点$P(2,0)$.

（i）求证：直线l过定点Q，并求出Q的坐标；

（ii）求三角形PAB面积的最大值.

20．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{ax}(x-1)^2$.

(1)若$a=1$，求$f(x)$在$\left(0,f(0)\right)$处切线方程；

(2)求$f(x)$的极大值与极小值；

(3)证明：存在实数M，当$a>0$时，函数$y=f\left(x\right)-M$有三个零点.

21．已知A为有限个实数构成的非空集合，设$A+A=\left\{a_i+a_j\middle|a_i,a_j\in A\right\}$，$A-A=\left\{a_i-a_j\middle|a_i,a_j\in A\right\}$，记集合$A+A$和$A-A$其元素个数分别为$|A+A|$，$|A-A|$.设$n\left(A\right)=\left|A+A\right|-\left|A-A\right|$.例如当$A=\{1,2\}$时，$A+A=\{2,3,4\}$，$A-A=\{-1,0,1\}$，$\left|A+A\right|=\left|A-A\right|$，所以$n\left(A\right)=0$.

(1)若$A=\{1,3,5\}$，求$n(A)$的值；

(2)设A是由3个正实数组成的集合且$(A+A)\cap A=\emptyset$，$A'=A\cup\{0\}$;，证明：$n\left(A'\right)-n\left(A\right)$为定值；

(3)若$\{a_n\}$是一个各项互不相同的无穷递增正整数列，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，设$A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$b_n = n(A_n)$.已知$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，且对任意$n \in \mathbf{N}^*$，$b_n \geq 0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

参考答案：

1．B

【来源】【全国百强校】宁夏石嘴山市第三中学 2019 届高三上学期期中考试数学（文）试题

【分析】根据集合交集的运算可得答案.

【详解】解集合 B 得$B=\{x|x\leq -1\}$

根据集合交集运算可得$A\cap B=\{-1,-2\}$，即由 2 个元素

所以选 B

【点睛】本题考查了集合交集的基本运算，属于基础题.

2．D

【来源】北京市海淀区首都师范大学附属中学 2022 届高三下学期三模练习数学试题

【分析】直接利用赋值法和不等式的基本性质的应用求出结果.

【详解】对于选项 A，当 c=0 时，ac^2=bc^2，故选项 A 错误；

对于选项 B，当$a=-1,b=-2,c=-3$时，$a^2>b^2>c^2$ 错误；

对于选项 C，当 a=1，b=0，$c=-3$时，$a+c>2b$ 错误；

对于选项 D，直接利用不等式的基本性质的应用求出$a-c>b-c$，故选项 D 正确.

故选：D.

【点睛】本题考查不等式的性质，属于基础题.

3．B

【来源】北京市首都师范大学附属中学 2023 届高三下旬阶段性检测数学试题

【分析】由对应点坐标写出复数，结合复数除法运算化简复数即得虚部.

【详解】由题意可得：$z=1-3i$，则$\frac{z}{i}=\frac{1-3i}{i}=-3-i$，

所以复数$\frac{z}{i}$的虚部是 -1.

故选：B.

4．D

【来源】江苏省连云港市赣榆区 2020-2021 学年高二下学期期中数学试题

【分析】二项式展开式的第 k+1 项的二项式系数为C_n^k，进而得到答案.

【详解】二项式展开式第三项的二项式系数为$C_8^2=28$.

故选：D.

5．A

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

【来源】北京市中关村中学 2023 届高三三模数学练习试题

【分析】解方程$x_0+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x_0$即得解.

【详解】解：由题得抛物线的准线方程为$x=-\frac{1}{4}$，则有$|AF|=x_0+\frac{1}{4}$，即有$x_0+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x_0$，

解得$x_0=1$.

故选：A

6．A

【来源】北京市师大附属中学 2023 届高三适应性练习数学试题

【分析】由三角函数的相位变换可得变换后的图象对应的解析式，再根据正弦函数的对称轴可得φ以及φ的最小值.

【详解】将函数$y=\sin 2x$的图象向左平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度得到的函数图象对应的函数解析式为$y=\sin(2x+2\varphi)$，

因为其图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，所以$2\times\frac{\pi}{6}+2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，

解得$\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，则正数$\varphi$的最小值为$\frac{\pi}{12}$，

故选：A.

【点睛】本题考查了三角函数的图象的相位变换，考查了正弦函数的对称轴．属于基础题.

7．C

【来源】北京市师大附属中学 2023 届高三适应性练习数学试题

【分析】由题意求出切线长$|PA|$的表达式，结合二次函数的性质即可求解.

【详解】由题可知圆的圆心为$O(0,0)$，半径为$r=1$，

设$P(x_0,y_0)$，则$3x_0+4y_0-10=0$，有$y_0=\frac{10-3x_0}{4}$，

得$|PA|=\sqrt{|OP|^2-1}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-1}=\frac{1}{4}\sqrt{25x_0^2-60x_0+84}$，

当$x_0=\frac{30}{25}=\frac{6}{5}$时，$|PA|_{min}=\frac{1}{4}\sqrt{36-60\times\frac{6}{5}+84}=\sqrt{3}$.

故选：C.

8．C

【来源】北京市第二中学 2023 届高三校模数学试题

【分析】利用题干数据代入，待定系数求解即可

【详解】由题意，当$t=0$时，$S=a=7$；当$t=5$时，$S=ae^{-5k}=3.5$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\therefore e^{-5k}=\frac{1}{2}\therefore -5k=\ln\frac{1}{2}\therefore k=\frac{\ln 2}{5}$

故选：C

9．C

【来源】北京市师大附属中学2023届高三适应性练习数学试题

【分析】根据向量的运算法则和公式$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$进行化简，结合充分条件和必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由$|\vec{a}|\le|\vec{a}-\lambda\vec{b}|$，则$|\vec{a}|^2\le|\vec{a}-\lambda\vec{b}|^2$，即$0\le\lambda^2\vec{b}^2-2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$，

当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，此时$\lambda^2\vec{b}^2-2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda^2\vec{b}^2\ge 0$恒成立，

即充分性成立；

当$\lambda^2\vec{b}^2-2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$对于任意的实数$\lambda$恒成立时，

可得$\Delta=4(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le 0$，又$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\ge 0$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，即必要性成立，

综上可得，“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“对于任意的实数λ，都有$|\vec{a}|\le|\vec{a}-\lambda\vec{b}|$”的充分必要条件.

故选：C.

10．B

【来源】北京市师大附属中学2023届高三适应性练习数学试题

【分析】由条件转化为$\ln x_0=ax_0-1$有解，求出$y=ax-1$与$y=\ln x$的切点，数形结合求解即可.

【详解】由题意$f(x_0)=\ln x_0$，$f(-x_0)=-ax_0+1$，

即$\ln x_0=ax_0-1$有解，

先求$y=ax-1$与$y=\ln x$相切时，

$y=ax-1$过定点$(0,-1)$，$y=\ln x$的导数$y'=\frac{1}{x}$，

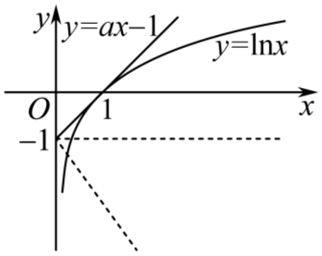
设切点为$(x_1,\ln x_1)$，则由导数可知$k=\frac{1}{x_1}$，

所以$k=a=\frac{1}{x_1}=\frac{\ln x_1+1}{x_1-0}$，解得$x_1=1$，

即切点为$(1,0)$，此时切线斜率$a=1$，

作出函数图象，如图，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



由图象可知，当$a\le 1$时，存在存在$x_0>0$，使得$f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$成立.

故选：B

11．$-1,2)\cup(2,+\infty)$

【来源】北京市第十中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】利用二次根式被开方数非负和分式分母不为零，列不等式组可求得答案

【详解】由题意得$\begin{cases}x+1\ge 0\\2-x\ne 0\end{cases}$，解得$x\ge -1$且$x\ne 2$，

所以函数的定义域为$-1,2)\cup(2,+\infty)$，

故答案为：$-1,2)\cup(2,+\infty)$

12．　　6　　n^2+n

【来源】北京市丰台区第二中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】设公差为d，根据等差数列求和公式求出d，即可求出通项公式及前n项和公式.

【详解】设公差为d，由$a_1=2$，$S_4=20$，所以$S_4=4a_1+\frac{4(4-1)d}{2}=20$，即$4\times 2+\frac{4(4-1)d}{2}=20$，

解得$d=2$，所以$a_n=2n$，

则$a_3=6$，$S_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n^2+n$

故答案为：6；n^2+n

13．　　2　　$2\sqrt{3}$

【来源】北京市丰台区第二中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】易得$c=2$，$a=1$，再结合$b^2=c^2-a^2$，可知$b=\sqrt{3}$，然后由$e=\frac{c}{a}$求出离心率；

可求出经过一、三象限的渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，设点$Q(x,\frac{\sqrt{3}}{3}x)$，分别求出$\overrightarrow{F_1Q}$和$\overrightarrow{F_2Q}$，根据

$\overrightarrow{F_1Q}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=0$列出方程，求出$x$的值，然后可得点$Q$到$y$轴的距离，$|F_1F_2|=4$，最后计算△

QF_1F_2的面积.

【详解】易知$c=2$，$2a=2$，所以$a=1$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

又$b^2=c^2-a^2=4-1=3$，$b=\sqrt{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=2$；

所以双曲线的方程为：$y^2-\frac{x^2}{3}=1$，其中经过一、三象限的渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

故可设点$Q(x,\frac{\sqrt{3}}{3}x)$，所以$\overrightarrow{F_1Q}=(x,\frac{\sqrt{3}}{3}x-2)$，$\overrightarrow{F_2Q}=(x,\frac{\sqrt{3}}{3}x+2)$，

因为$F_1Q\perp F_2Q$，所以$\overrightarrow{F_1Q}\cdot\overrightarrow{F_2Q}=0$，即$x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\right)=0$，

解之得：$x=\pm\sqrt{3}$，所以点Q到y轴的距离为$\sqrt{3}$，又$|F_1F_2|=4$，所以：

$S_{\triangle QF_1F_2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 4=2\sqrt{3}$.

故答案为：2；$2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查双曲线离心率的计算，考查向量垂直的应用，考查逻辑思维能力和运算求解能力，考查转化思想，属于常考题.

14.　　0（答案不唯一，满足$a\in-1,+\infty)$即可）　　$(-\infty,-1)$

【来源】北京市第十中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】利用导数可求得$g(x)=x^3-3x$的单调性和极值，由此可得$g(x)$与$y=-2x$的图象，结合图象分析即可得到结果.

【详解】令$g(x)=x^3-3x$，则$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

$\therefore$当$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(-1,1)$时，$g'(x)<0$；

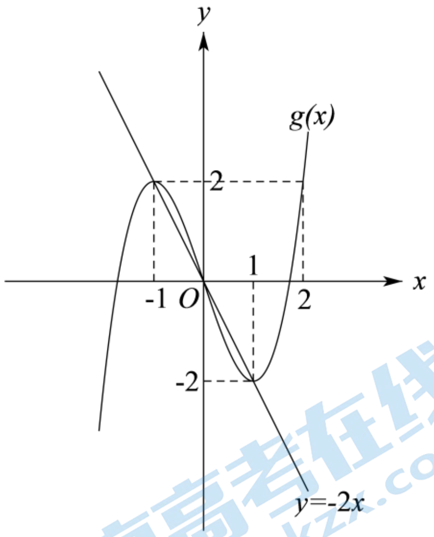
$\therefore g(x)$在$(-\infty,-1),(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，

$\therefore g(x)$极大值为$g(-1)=-1+3=2$，极小值为$g(1)=1-3=-2$；

令$g(x)=-2x$，即$x^3-3x=-2x$，解得：$x=\pm1$或$x=0$；

由此可作出$g(x)$与$y=-2x$图象如下图所示，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



对于①，结合图象可知：若$f(x)$存在最大值，则$a \in -1,+\infty)$，$\therefore a$的一个取值为0；

对于②，若$f(x)$无最大值，只需$-2a > 2$，解得：$a < -1$，即$a \in (-\infty,-1)$；

故答案为：0（答案不唯一，满足$a \in -1,+\infty)$即可）；$(-\infty,-1)$.

15．①③

【来源】北京大兴精华学校 2023 届高三高考适应性测试数学试题

【分析】

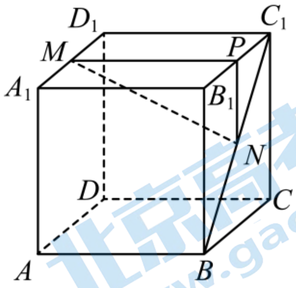
对①②，举例判断说明即可；对③④，以D为坐标原点建立空间直角坐标系，设$M(t,0,1)$，则$N(1-\lambda,1,\lambda)$，其中$t,\lambda \in [0,1]$，根据$MN \perp BC_1$满足$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$分析即可.

【详解】对①，当M，N分别为A_1D_1，B_1C_1的中点时，取B_1C_1中点P，连接MP,NP，则根据中位线的性质可得$MP // A_1B_1$，

又$MP \not\subset$平面ABB_1A_1，$A_1B_1 \subset$平面ABB_1A_1，故$MP//$平面ABB_1A_1，同理$NP//$平面ABB_1A_1，

又$MP \cap NP = P$，$MP,NP \subset$平面MNP，故平面$MNP//$平面ABB_1A_1.

又$MN \subset$平面MNP，故$MN//$平面ABB_1A_1.故①正确.



对②，当M在A_1时，$MN \not\parallel$平面ABB_1A_1不成立，故②错误；

对③④，以D为坐标原点建立如图空间直角坐标系，设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为 1，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

则$B(1,1,0), C_1(0,1,1)$，$\overrightarrow{BC_1} = (-1,0,1)$.

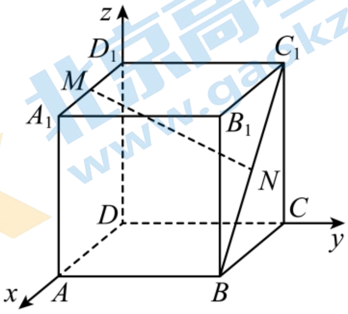
设$M(t,0,1)$，$\overrightarrow{BN} = \lambda\overrightarrow{BC_1} = (-\lambda,0,\lambda)$，则$N(1-\lambda,1,\lambda)$，其中$t,\lambda \in [0,1]$，故$\overrightarrow{MN} = (1-\lambda-t,1,\lambda-1)$，

则当$MN \perp BC_1$时$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \lambda + t - 1 + \lambda - 1 = 0$，即$t + 2\lambda = 2$.

故对任意的$t \in [0,1]$，存在$\lambda = 1 - \frac{t}{2} \in \left[\frac{1}{2},1\right]$满足条件，即任意点$M$，存在点$N$，满足$MN \perp BC_1$.

故③正确；

当$\lambda = 0$，即N在B点时，若$MN \perp BC_1$，则$t = 2$，不满足$t \in [0,1]$，即M不在A_1D_1上，故④错误.



故答案为：①③

16．(1)$B = \frac{\pi}{6}$

(2)选择条件②,$S = \frac{3\sqrt{3}+4}{2}$；选择条件③$S = \sqrt{3}$.

【来源】北京市清华大学附属中学 2022 届高三下学期数学统练 6 试题

【分析】(1)利用余弦定理求解即可；

(2)根据条件①②③逐一计算，满足三角形只有一个解即可，再求面积.

【详解】(1）由余弦定理知，$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$B \in (0,\pi)$，所以$B = \frac{\pi}{6}$.

(2）选择条件①：

把$a = 2\sqrt{3}$，$b = 3$代入$a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac = b^2$中，化简得$c^2 - 6c + 3 = 0$，解得$c = 3 \pm \sqrt{6}$，

所以存在两个$\triangle ABC$，不符合题意；

选择条件②：

因为$\cos A = \frac{4}{5}$，$A \in (0,\pi)$，所以$\sin A = \frac{3}{5}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$b=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$，

所以△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{3\sqrt{3}+4}{10}=\frac{3\sqrt{3}+4}{2}$.

选择条件③：

因为△ABC的周长为$4+2\sqrt{3}$，且$a=2\sqrt{3}$，所以$b+c=4$，

又$a^2+c^2-\sqrt{3}ac=b^2$，所以$12+c^2-6c=b^2=(4-c)^2$，解得$b=c=2$，

所以△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.

17．(1)16；$\frac{1}{40}$

(2)分布列见解析；$\frac{2}{5}$

(3)“一个”在前更合适

【来源】北京市海淀区北京大学附属中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】(1)根据表中数据即可求得 a 的值；根据古典概型的概率公示可求得甲类题材中“一”出现的概率；

（2）确定$X\sim B(2,\frac{1}{5})$，根据二项分布的概率计算即可求得答案；

（3）计算样本语料库 A，B中“一个”和“一格”出现的概率，比较大小，可得结论.

【详解】(1）由题意可得$a=30-6-4-2-2=16$；

故甲类题材中“一”出现的概率为$\frac{30}{1200}=\frac{1}{40}$；

（2)由题意在甲类题材“新闻稿”中随机抽取 2 个“一”，搭配“一个”出现的概率为$P=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$，

则$X\sim B(2,\frac{1}{5})$，则$P(X=0)=C_2^0(\frac{1}{5})^0(1-\frac{1}{5})^2=\frac{16}{25}$,$P(X=1)=C_2^1(\frac{1}{5})^1(1-\frac{1}{5})^1=\frac{8}{25}$,

$P(X=2)=C_2^2(\frac{1}{5})^2(1-\frac{1}{5})^0=\frac{1}{25}$,

故 X 的分布列为：

X	0	1	2

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

则$E(X)=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

（3）由题意知样本语料库B中“一格”出现的概率为$\frac{2}{800}=\frac{1}{400}$，

甲类题材中“一个”出现的概率为$\frac{6}{1200}=\frac{1}{200}$，

由于$\frac{1}{200}>\frac{1}{400}$，故输入拼音“yige”时，“一个”在前面更合适.

18．(1)证明见解析

(2)（i）$\frac{\sqrt{2}}{4}$；（ii）$\frac{\sqrt{21}}{7}$；（iii）证明见解析

【来源】北京市第一零一中学 2023 届高三三模数学统考四试题

【分析】（1）由面面垂直的性质定理证明即可；

（2）建立空间直角坐标系用坐标法计算即可.

【详解】（1）因为底面$ABCD$是正方形，所以$AB\perp AD$，

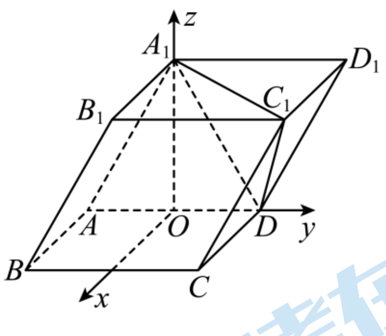
又因为平面$A_1ADD_1\perp$平面$ABCD$，且平面$A_1ADD_1\cap$平面$ABCD=AD$，

$AB\subset$平面$ABCD$，

所以$AB\perp$平面A_1ADD_1.

因为$A_1D\subset$平面A_1ADD_1，所以$AB\perp A_1D$.

（2）（i）如图建立空间直角坐标系$O-xyz$，



则 $A(0,-1,0),B_1\left(2,0,\sqrt{3}\right),A_1\left(0,0,\sqrt{3}\right),D_1\left(0,2,\sqrt{3}\right),D(0,1,0),C_1\left(2,2,\sqrt{3}\right)$

所以$\overrightarrow{AB_1}=\left(2,1,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{A_1D_1}=(0,2,0)$，

设直线AB_1与直线A_1D_1所成角为θ，则

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{A_1D_1}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\overrightarrow{A_1D_1}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

（ii）$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0),\overrightarrow{A_1D}=\left(0,1,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{AA_1}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$

设平面A_1DC_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}y-\sqrt{3}z=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$，

令$z=1$，则$y=\sqrt{3},x=-\sqrt{3}$，

于是$\vec{n}=\left(-\sqrt{3},\sqrt{3},1\right)$.

所以点A到平面A_1C_1D的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（iii）设E是线段AA_1上一点，设$\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{A_1A}\left(\lambda\in(0,1)\right)$.

则$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{CA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1A}=\left(-2,-1-\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$

因为$\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=2\sqrt{3}(1-\lambda)\neq 0$，

所以直线CE与平面A_1C_1D相交.

19．(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2)（i）证明见解析，$Q\left(\frac{2}{7},0\right)$；（ii）$\frac{144}{49}$

【来源】北京市第二中学 2023 届高三校模数学试题

【分析】（1）设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，然后通过求出$a$、$c$的值，可得出$b$的值，由此可得出椭圆$C$的方程；

（2）（i）设直线AB的方程为$x=my+n$，设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，将直线AB的方程与椭圆的方程联立，列出韦达定理，通过$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$可得出$m$、$n$所满足的关系式，即可求得直线$AB$所过定点的坐标；

（ii）求出$|AB|$以及点P到直线AB的距离，利用三角形的面积公式结合基本不等式可求得△PAB面积的最大值.

【详解】（1）解：设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

因为椭圆C的长轴长为4，焦距为2，则$\begin{cases}2a=4\\ 2c=2\end{cases}$，可得$a=2$，$c=1$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

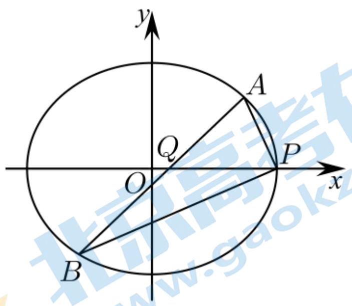
因此，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）证明：（i）因为椭圆C过点$P(2,0)$，设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

若$AB\perp y$轴，则$B(-x_1,y_1)$且$x_1\neq 0$，$\overrightarrow{AP}=(2-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(2+x_1,-y_1)$，

此时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=4-x_1^2-y_1^2=4-x_1^2-\frac{3x_1^2}{4}-4=-\frac{7x_1^2}{4}<0$，不合乎题意；

设直线AB的方程为$x=my+n$，



联立$\begin{cases}x=my+n\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$可得$(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$，

$\Delta=36m^2n^2-12(3m^2+4)(n^2-4)=48(3m^2+4-n^2)>0$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=-\frac{6mn}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}$，

$\overrightarrow{PA}=(x_1-2,y_1)=(my_1+n-2,y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-2,y_2)=(my_2+n-2,y_2)$，

所以，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(my_1+n-2)(my_2+n-2)+y_1y_2$

$$=(m^2+1)y_1y_2+m(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2$$

$=\frac{3(n^2-4)(m^2+1)-6m^2n(n-2)+(n-2)^2(3m^2+4)}{3m^2+4}=0$，

因为直线AB不过点P，则$n\neq 2$，整理可得$7n-2=0$，解得$n=\frac{2}{7}$，

所以，直线AB的方程为$x=my+\frac{2}{7}$，所以，直线AB过定点$Q\left(\frac{2}{7},0\right)$；

（ii）直线AB的方程为$x-my-\frac{2}{7}=0$，

所以，点P到直线AB的方程为$d=\frac{\frac{12}{7}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{12}{7\sqrt{m^2+1}}$，

$$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{6mn}{3m^2+4}\right)^2-\frac{4(3n^2-12)}{3m^2+4}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1+m^2)(3m^2+4-n^2)}}{3m^2+4}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1+m^2)\left(3m^2+4-\frac{4}{49}\right)}}{3m^2+4}$$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{49(3m^2+4)-4}}{3m^2+4}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{(1+m^2)[49(3m^2+4)-4]}}{3m^2+4}\cdot\frac{12}{7\sqrt{m^2+1}}$

$=\frac{24\sqrt{3}}{49}\cdot\frac{\sqrt{49(3m^2+4)-4}}{3m^2+4}$，

令$t=3m^2+4\geq 4$，则$S_{\triangle PAB}=\frac{24\sqrt{3}}{49}\cdot\frac{\sqrt{49t-4}}{t}=\frac{24\sqrt{3}}{49}\sqrt{\frac{49}{t}-\frac{4}{t^2}}=\frac{24\sqrt{3}}{49}\sqrt{-4\left(\frac{1}{t}-\frac{49}{8}\right)^2+\frac{49^2}{16}}$，

因为$0<\frac{1}{t}\leq\frac{1}{4}$时，故当$t=4$时，$S_{\triangle PAB}$取最大值$\frac{24\sqrt{3}}{49}\times 2\sqrt{3}=\frac{144}{49}$.

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中的最值问题解决方法一般分两种：

一是几何法，特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来求最值；

二是代数法，常将圆锥曲线的最值问题转化为二次函数或三角函数的最值问题，然后利用基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等求最值.

20．(1)$x+y-1=0$

(2)见解析

(3)证明见解析

【来源】北京市海淀区北京大学附属中学 2023 届高三三模数学试题

【分析】(1）根据导数的几何意义求出切线斜率即可得解；

（2）求出函数导数，分类讨论得函数单调性，根据单调性求函数极值即可；

（3）根据（2）判断函数大致变化趋势，由函数零点个数即函数图象与 x 轴交点个数可证明.

【详解】(1）当$a=1$时，$f(x)=e^x(x-1)^2$，$f'(x)=e^x(x^2-1)$，

所以$k=f'(0)=e^0(0^2-1)=-1$，

又$f(0)=e^0(0-1)^2=1$，

所以切线方程为$y-1=-(x-0)$，即$x+y-1=0$.

（2）$f'(x)=ae^{ax}(x-1)^2+2e^{ax}(x-1)=e^{ax}(x-1)(ax-a+2)$，

当$a=0$时，$f'(x)=2(x-1)=0$，解得$x=1$，

故$x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

故$x=1$时，$f(x)$的极小值为$f(1)=0$，无极大值；

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=1$，$x_2=1-\frac{2}{a}$，

故当$x<1-\frac{2}{a}$或$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$1-\frac{2}{a}<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故$f(x)$的极大值为$f(1-\frac{2}{a})=e^{a-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为$f(1)=0$；

当$a<0$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=1$，$x_2=1-\frac{2}{a}$，

故当$x<1$或$x>1-\frac{2}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$1<x<1-\frac{2}{a}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

故$f(x)$的极大值为$f(1-\frac{2}{a})=e^{a-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为$f(1)=0$；

综上，当$a=0$时，$f(x)$的极小值为$f(1)=0$，无极大值；当$a\neq 0$时，$f(x)$的极大值为$f(1-\frac{2}{a})=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为$f(1)=0$.

（3）当$a>0$时，由（2）知，$f(x)$ 在$(-\infty,1-\frac{2}{a})$和$(1,+\infty)$上单调递增，

在$(1-\frac{2}{a},1)$上单调递减，且$x<1$时，$f(x)=e^{ax}(x-1)^2>0$恒成立，

$x\to+\infty$ 时，$f(x)=e^{ax}(x-1)^2\to+\infty$，

又$f(x)$的极大值为$f(1-\frac{2}{a})=\frac{4e^{a-2}}{a^2}$，极小值为$f(1)=0$，

所以存在实数$0<M<\frac{4e^{a-2}}{a^2}$时，函数$y=f(x)-M$有三个零点.

21．(1)$n(A)=0$

(2)证明见解析

(3)$a_n=n$

【来源】北京市海淀区北京大学附属中学2023届高三三模数学试题

【分析】(1) 根据题中的定义，列举出$A+A$，$A-A$即可；

（2）先列举$A+A$，$A-A$，$A'+A'$，$A'-A'$中可能元素，根据集合的互异性判断元素个数差即可；

（3）类比（1）（2）当数列由$A_2=\{1,2\}$到$A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，为保证$n\in N^*,b_n\geq 0$成立，则必有$a_1,a_2,\cdots,a_n$其成等差数列，故猜想$a_n=n$，可用数学归纳法给予证明.

【详解】(1) 当$A=\{1,3,5\}$时，$A+A=\{2,4,6,8,10\}$，$A-A=\{-4,-2,0,2,4\}$，

$|A+A|=|A-A|$，所以$n(A)=0$；

（2）设$A=\{a,b,c\}$，其中$0<a<b<c$，

则$A'=A\cup\{0\}=\{0,a,b,c\}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$$n(A')-n(A)=|A'+A'|-|A'-A'|-(|A+A|-|A-A|)$$

$=(|A'+A'|-|A+A|)-(|A'-A'|-|A-A|)$，

因$0<a<2a<a+b<2b<b+c<2c$，

$A+A=\{2a,2b,2c,a+b,b+c\}\cup\{a+c\}$，

因$(A+A)\cap A=\emptyset$，

所以$b\neq 2a$，$c\neq 2b$，$c\neq 2a$，$c\neq a+b$，

又$A'+A'=\{b,c\}\cup\{0,a,2a,2b,2c,a+b,b+c\}\cup\{a+c\}$，

$a+c\neq 0$，$a+c\neq a$，

所以$|A'+A'|-|A+A|=4$，

因$-c<-b<-a<0<a<b<c, a-c<a-b<0<b-a<c-a, b-c<0<c-b$，

$A-A=\{0,a-b,a-c,b-a,c-a\}\cup\{b-c,c-b\}$，

$A'-A'=\{a,b,-a,-b\}\cup\{0,c,-c,a-b,a-c,b-a,c-a\}\cup\{b-c,c-b\}$，

因$b\neq 2a$，$c\neq 2b$，$c\neq 2a$，$c\neq a+b$，

所以$a\neq b-a$，$a\neq c-a$，$b\neq c-b$，$a\neq c-b$，

$b-c\neq 0$，$b-c\neq 0$，$b-c\neq c$，$b-c\neq -c$

所以$|A'-A'|-|A-A|=6$

$$n(A')-n(A)=-2$$

所以$n(A')-n(A)$为定值；

（3）$A_3=\{1,2,a_3\}\ (a_3\in\mathrm{N}^*)$，

若$a_3\geq 4, a_3\in\mathrm{N}^*$，

则$4<1+a_3<2+a_3<2a_3$，

$1-a_3<2-a_3<-1<1<a_3-2<a_3-1$，

故$A_3+A_3=\{2,3,4,1+a_3,2+a_3,2a_3\}$，

$A_3-A_3=\{1-a_3,2-a_3,-1,0,1,a_3-2,a_3-1\}$，

此时$b_3=n(A_3)=|A_3+A_3|-|A_3-A_3|=-1$，不符合题意，

故$a_3=3$，

猜想$a_n=n$，下面给予证明，

当$n\leq 3$时，显然成立，

假设当$n\leq k$，$k\in N^*$时，都有$a_k=k$成立，即$A_k=\{1,2,3,\cdots,k\}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

此时$A_k+A_k=\{2,3,4,\cdots,2k\}$，$A_k-A_k=\{1-k,2-k,3-k,\cdots,0,1,2,\cdots,k-1\}$，

故$|A_k+A_k|=2k-2+1=2k-1$，$|A_k-A_k|=k-1-(1-k)+1=2k-1$，

$b_k=n(A_k)=0$，符合题意，

$A_{k+1}=\{1,2,\cdots,k,a_{k+1}\}$，$a_{k+1}\in \mathrm{N}^*$

则$A_{k+1}+A_{k+1}=\{2,3,4,\cdots,2k\}\cup\{2+a_{k+1},3+a_{k+1},\cdots,k+a_{k+1}\}$，

$A_{k+1}-A_{k+1}=\{1-k,2-k,3-k,\cdots,0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{1-a_{k+1},2-a_{k+1},\cdots,0,1,\cdots,a_{k+1}-1\}$，

若$a_{k+1}\geq k+2$，

$\{2,3,4,\cdots,2k\}\cap\{2+a_{k+1},3+a_{k+1},\cdots,k+a_{k+1}\}$的元素个数小于$\{1-k,2-k,3-k,\cdots,0,1,2,\cdots,k-1\}\cap\{1-a_{k+1},2-a_{k+1},\cdots,0,1,\cdots,a_{k+1}-1\}$的元素个数，

则有$b_{k+1}=n(A_{k+1})=|A_{k+1}+A_{k+1}|-|A_{k+1}-A_{k+1}|<|A_k+A_k|-|A_k-A_k|=n(A_k)=0$，

不符合题意，故$a_{k+1}=k+1$，

综上，对于任意的$n\in N^*$，都有$a_n=n$，

故数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n$.

【点睛】关键点点睛：本题的核心是利用集合的新定义，列举集合中元素，注意集合的互异性，进而得到集合的元素个数.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

北京各区高三三模试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年北京各区高三三模试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**三模**】,查看下载!

微信搜一搜

京考一点通